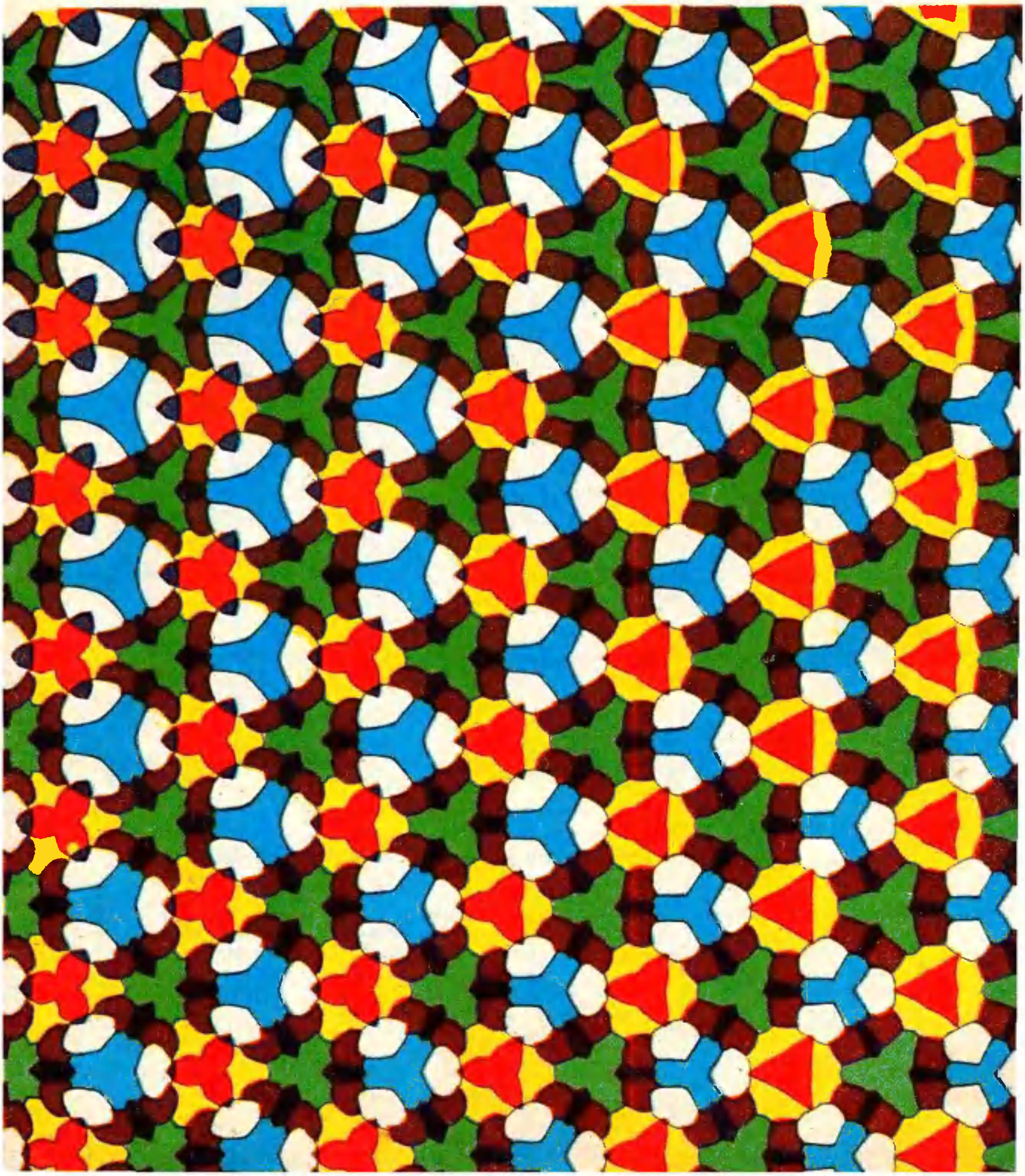
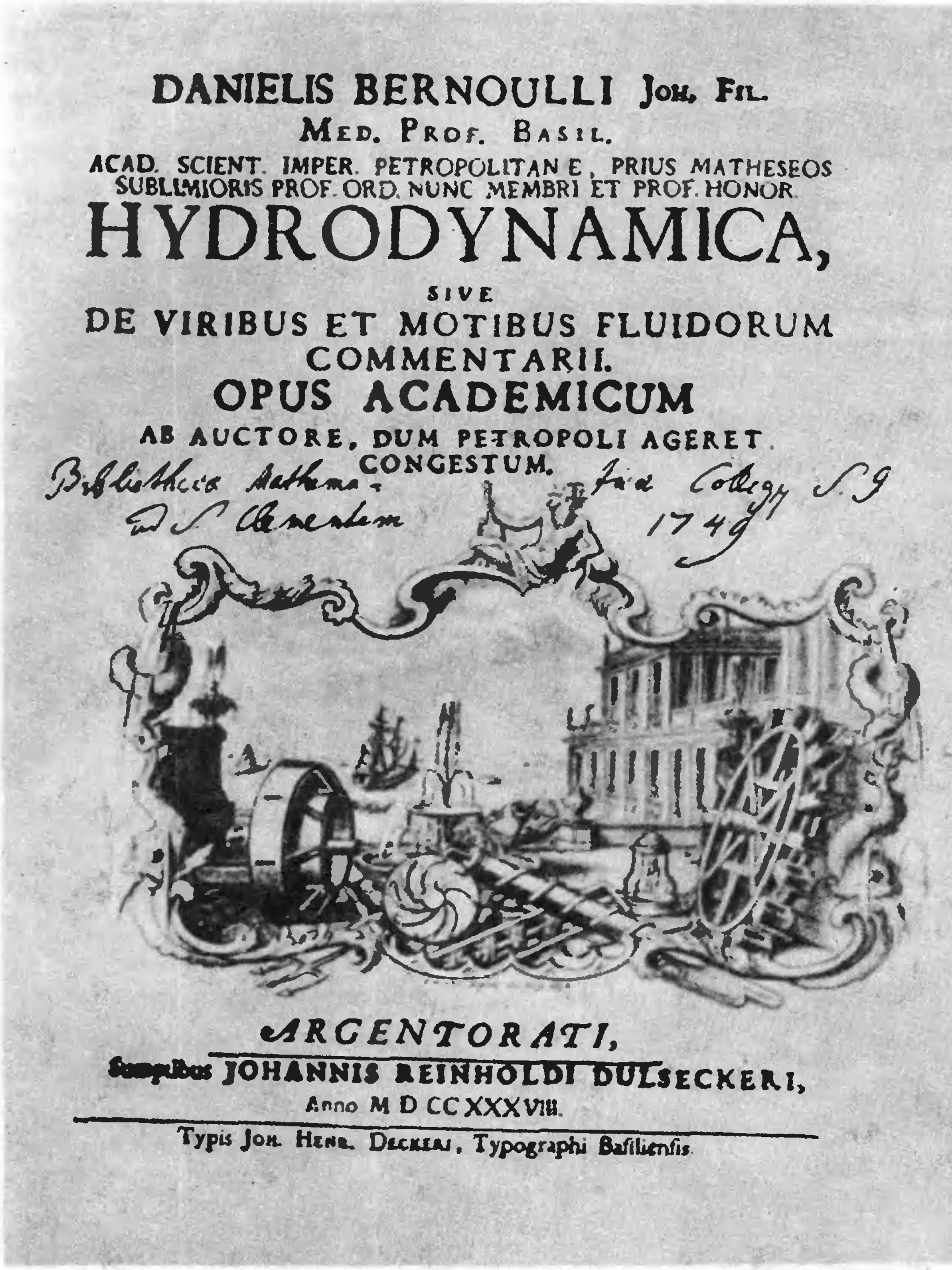
ISSN 0130-2221

Квант

3
1982

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР




DANIELIS BERNOULLI JOH. FIL.
MED. PROF. BASIL.
ACAD. SCIENT. IMPER. PETROPOLITANÆ, PRIUS MATHESEOS SUBLIMIORIS PROF. ORD. NUNC MEMBRI ET PROF. HONOR.
HYDRODYNAMICA,
SIVE
DE VIRIBUS ET MOTIBUS FLUIDORUM COMMENTARII.
OPUS ACADEMICUM
AB AUCTORE, DUM PETROPOLI AGERET, CONGESTUM.
1749
ARGENTORATI,
Sumptibus JOHANNIS REINHOLDI DULSECKERI,
Anno M D CC XXXVIII.
Typis Joh. Henr. Deckeri, Typographi Basiliensis.

Титульный лист первого издания книги Даниила Бернулли «Гидродинамика».

В этом номере мы помещаем статью о жизни о научной деятельности Даниила Бернулли (1700—1782) — замечательного ученого-естествоиспытателя, почетного профессора Петербургской Академии Наук, одного из основоположников гидродинамики.

Квант 3 1982

Основан в 1970 году

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ: IN THIS ISSUE:

Годовщина замечательной статьи

Шестьдесят лет назад, в марте 1922 года в журнале «Под Знаменем Марксизма» была впервые опубликована работа В. И. Ленина «О значении воинствующего материализма». В ней четко обозначено несколько очень важных задач, которые не потеряли своей актуальности и в наши дни.

Прежде всего — задача укрепления и развития союза марксистской философии и естествознания. Еще в 1909 году в книге «Материализм и эмпириокритицизм» Ленин убедительно показал, что в период величайшей революции в физике, связанной с открытием радиоактивности и сложного строения атомов, созданием специальной теории относительности и т. д., многие выдающиеся ученые оказались не в состоянии правильно оценить суть происходящих событий. Они воспринимали их как глубокий кризис физики, ликвидацию ряда основных ее понятий и законов, крах материализма и торжество идеализма в самых разнообразных формах. Научный анализ революции в физике и точный прогноз ее дальнейшего развития можно было сделать только с позиций диалектического материализма, что и было выполнено В. И. Лениным.

Борьба материализма с идеализмом приобрела в последующие годы еще большую остроту в связи с возникновением квантовой механики и общей теории относительности. И здесь победа оказалась на стороне диалектического материализма. Идеи, разработанные Лениным в его гениальной книге, блестяще выдержали испытание временем.

Для правильной оценки роли и места физики в необычайно расширившемся семействе естественных наук, в познании окружающей нас природы, совершенно недостаточно хорошего знания ее законов и умения правильно решать конкретные физические задачи. Необходимо овладеть основами марксистского научного мировоззрения. Это отчетливо должны понимать все, кто хочет стать физиками или математиками. «...без солидного философского обоснования никакие естественные науки, никакой материализм не может выдержать борьбы против натиска буржуазных идей и восстановления буржуазного миросозерцания» — так писал В. И. Ленин в своей работе «О значении воинствующего материализма». А это означает, что и в школьные годы, успешно овладевая физикой и математикой, надо не менее упорно изучать общественные науки.

Буржуазное миросозерцание всегда было тесно связано с религией и мистикой, стремящимися примирить широкие народные массы с политическим и социальным неравенством, непрерывно растущей эксплуатацией со стороны предпринимателей, призывающими к смирению, покорности судьбе, непротивлению вопиющему злу. И чем сложнее оказывалась конкретная социальная обстановка в какой-либо капиталистической стране, тем активнее пропагандировались религиозные представления. Никогда, например, в США не было такого ажиотажа вокруг восточных религиозных культов, разнообразных, порою изуверских сект, гадалок, прорицателей, астрологов, как в наши дни.

Религиозные представления до сих пор сохраняются и в сознании некоторых наших граждан. Церковь в СССР отделена от государства, и каждый из вас имеет полную свободу в выборе того или иного мировоззрения. Но это вовсе не означает, что те, кто являются атеистами, не должны вести активную антирелигиозную пропаганду, быть, по словам Ленина, «воинствующими атеистами». Современная наука дает вам множество убедительных подтверждений несостоятельности религиозных представлений о «сотворении мира», возникновении и развитии человека и человеческого общества. Их следует широко использовать в целях антирелигиозной пропаганды. Эту пропаганду надо вести терпеливо, настойчиво, убедительно, индивидуально, не оскорбляя религиозных чувств верующих. Каждый отвоеванный нами у церкви гражданин — это реальная победа в строительстве коммунистического общества. Такова вторая задача, поставленная В. И. Лениным в этой замечательной статье.

Л. Понтрягин

Комплексные числа

Здесь я прежде всего очень кратко рассказываю о том, как возникли в математике и постепенно утвердились в ней комплексные числа. Затем даю определение комплексных чисел, действий над ними и их геометрическую интерпретацию. Попутно доказываются формулы косинуса и синуса суммы, тесно связанные с умножением комплексных чисел.

Историческая справка

Из курса математики известно, что отрицательные числа введены прежде всего для того, чтобы операция вычитания, обратная к операции сложения, была всегда возможна. По аналогичной причине в математике появились комплексные числа. Если рассматривать только действительные числа, то операция извлечения квадратного корня, обратная к операции возведения в квадрат, не всегда возможна, так как нельзя извлечь квадратный корень из отрицательного числа. Этого, однако, недостаточно, чтобы заводить в математике новые числа. Оказалось, что если производить вычисления по обычным правилам над выражениями, в которых встречается корень квадратный из отрицательного числа, то можно прийти к результату, уже не содержащему корень квадратный из отрицательного числа. В XVI веке Кардано нашел формулу для решения кубического уравнения («Квант», 1976, № 9, с. 2). Оказалось, что именно в том случае, когда кубическое уравнение имеет три действительных корня, в формуле Кардано встречается корень квадратный из отрицательного числа (там же, с. 11). Обнаружилось таким образом, что, производя вычисления с выражениями, содержащими корень квадратный из отрицательного числа, можно получить вполне понятные результаты. Поэтому эти корни стали употреблять в математике. Назвали их мнимыми числами — тем самым они как бы приобрели право на нелегальное существование. Полные гражданские права мнимым числам на грани XVIII—XIX столетий дал Гаусс («Квант», 1977, № 8, с. 2), который назвал их комплексными числами, дал им геометрическую интерпретацию и, что самое главное, доказал основную теорему алгебры, утверждающую, что каждый многочлен имеет хотя бы один действительный или комплексный корень.

Определение комплексных чисел

Мы будем исходить из того, что действительные числа нам известны. Мы знаем, что для них определены два основных действия — сложение и умножение — и имеются обратные к ним действия — вычитание и деление. Для этих действий выполняются хорошо известные правила, которые обычно употребляются совершенно автоматически — поэтому я их не буду здесь формулировать. Множество объектов, для которых определены действия сложения и умножения и обратные к ним действия вычитания и деления, причем выполнены обычные правила, имеющие место для действительных чисел, называется в современной абстрактной алгебре *полем*.

Таким образом, с точки зрения современной абстрактной алгебры множество **R** всех действительных чисел представляет собой поле.

Академик Л. С. Понтрягин написал статью «Комплексные числа и основная теорема алгебры» специально для «Кванта». Ввиду большого объема вторая часть статьи будет опубликована в следующем номере.

Поставим теперь перед собой задачу расширить понятие числа или, как говорят в абстрактной алгебре, расширить поле **R** до поля K таким образом, чтобы в этом новом поле K уравнение

$$z^2+1=0 \qquad (1)$$

имело решение. Элемент поля K, который удовлетворяет уравнению (1), мы обозначим через i. Таким образом, для i имеем

$$i^2=-1. \qquad (2)$$

Так как поле K содержит все действительные числа и элемент i и так как в нем возможны действия сложения и умножения, в поле K должны содержаться всевозможные многочлены относительно i с действительными коэффициентами, в частности — все многочлены первой степени, то есть выражения вида

$$z=x+yi=x+iy,$$

где x и y — действительные числа. Эти выражения и называются *комплексными числами*. Действия над ними мы определим как действия над многочленами, учитывая при этом условие (2). Комплексные числа вида

$$z=x+0i=x$$

являются действительными числами. Комплексные числа вида

$$z=0+yi=yi$$

называются *чисто мнимыми числами*.

Пусть $z_1=x_1+y_1i$, $z_2=x_2+y_2i$ — два комплексных числа. Согласно высказанному правилу сумма и произведение этих комплексных чисел определяются равенствами

$$z_1+z_2=(x_1+y_1i)+(x_2+y_2i)= \\ =(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i; \qquad (3)$$

$$z_1z_2=(x_1+y_1i)\ (x_2+y_2i)= \\ =x_1x_2+(x_1y_2+y_1x_2)i+y_1y_2i^2= \\ =(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+y_1x_2)i. \qquad (4)$$

При получении последнего равенства мы использовали условие (2).

В случае, если число $z_1=x_1$ — действительное, получаем

$$x_1z_2=x_1x_2+x_1y_2i. \qquad (5)$$

Из формул (3) и (4) видно, что сумма и произведение двух комплексных чисел есть также комплексное число.

Для того чтобы убедиться, что действие вычитания, обратное действию сложения, существует, достаточно найти число $-z$, противоположное числу z, а для того чтобы убедиться, что возможно деление, достаточно для $z\neq 0$ указать число z^{-1}, обратное числу $z=x+yi$. Числа эти, как легко видеть, задаются формулами

$$-z=-x-yi,$$

$$z^{-1}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i.$$

Таким образом, величина z^{-1}, обратная к z, существует всегда, когда $z\neq 0$.

Геометрическое изображение комплексных чисел

Обозначим через P плоскость нашего чертежа и выберем на ней прямоугольную систему координат (рис. 1). Комплексное число $z=x+yi$ мы поместим в точку $z=(x;\ y)$ с координатами x, y. Обозначим также через z вектор, идущий из начала координат O в точку z. Таким образом, буква z обозначает у нас одновременно комплексное число, точку z, изображающую это комплексное число, и вектор z, соответствующий этому комплексному числу. При этом изображении действительные числа попадают на ось абсцисс — поэтому ось абсцисс называется *действительной осью* плоскости P комплексного переменного, а чисто мнимые числа попадают на ось ординат — поэтому ось ординат называется *мнимой осью* плоскости P комплексного переменного. Нуль попадает в начало координат.

Длина вектора z называется *модулем* комплексного числа $z=$

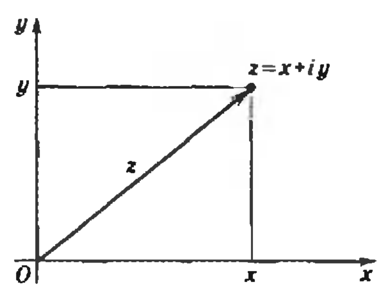


Рис. 1.

$=x+yi$ и обозначается $|z|$:

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Комплексные числа z, удовлетворяющие условию $|z|=1$, составляют окружность радиуса 1 с центром в начале координат. На этой окружности лежит число 1. Из точки 1 отложим по окружности дугу заданной длины φ в направлении против часовой стрелки. Конец этой дуги обозначим через (φ). Если φ — отрицательное число, то для получения (φ) нужно отложить от точки 1 длину дуги $|\varphi|$ по часовой стрелке. Как известно, абсцисса точки (φ) называется $\cos\varphi$, а ее ордината $\sin\varphi$. Таким образом, комплексное число (φ) задается формулой

$$(\varphi)=\cos\varphi+i\sin\varphi. \qquad (6)$$

Итак, всякое комплексное число z, по модулю равное 1, записывается в виде (6). Если z — произвольное комплексное число, модуль которого $|z|=\varrho$ отличен от 0, то число z/ϱ является комплексным числом, по модулю равным 1, и потому записывается в виде (6). Из равенства

$$\frac{z}{\varrho}=\cos\varphi+i\sin\varphi$$

мы получаем

$$z=\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi). \qquad (7)$$

Запись (7) называется *тригонометрической формой* комплексного числа. Число φ называется *аргументом* комплексного числа. Если модуль ρ комплексного числа z отличен от нуля, то аргумент φ определен с точностью до слагаемого $2\pi k$, где k — целое число. Если же модуль ρ комплексного числа равен 0, то формула (7) также имеет место, однако в этом случае аргумент комплексного числа вовсе не определен.

Числа ρ и φ называются *полярными координатами* точки z.

Дадим теперь геометрическое истолкование действий над комплексными числами.

Из формул (3) и (5) следует, что комплексные числа складываются и умножаются на действительные числа, как векторы.

Геометрический смысл сложения комплексных чисел очевиден: вектор z_1+z_2 — это диагональ параллелограмма, построенного на векторах z_1 и z_2. Отсюда вытекает важное неравенство

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|. \qquad (8)$$

Для того чтобы дать геометрическое истолкование умножения комплексных чисел, нужно употребить операцию поворота вектора или, что то же самое, комплексного числа. Повернув вектор z против часовой стрелки на угол α, мы получим некоторый новый вектор, который обозначим через $R_\alpha(z)$. Геометрически ясно, что операция поворота R_α имеет следующее свойство: если a — действительное число, то

$$R_\alpha(az)=aR_\alpha(z),$$
$$R_\alpha(z_1+z_2)=R_\alpha(z_1)+R_\alpha(z_2).$$

Из этих двух формул следует, что если a_1 и a_2 — два действительных числа, то имеет место соотношение

$$R_\alpha(a_1z_1+a_2z_2)=a_1R_\alpha(z_1)+a_2R_\alpha(z_2). \qquad (9)$$

Непосредственно ясно также, что

$$R_\alpha(1)=\cos\alpha+i\sin\alpha. \qquad (10)$$

Докажем теперь, что поворот комплексного числа $z=x+yi$ на угол α равносилен умножению его на комплексное число $\cos\alpha+i\sin\alpha$, то есть что

$$R_\alpha(z)=(\cos\alpha+i\sin\alpha)z. \qquad (11)$$

Для этого рассмотрим сначала отдельно поворот на угол $d=\frac{\pi}{2}$.

В этом случае $\cos d+i\sin d=i$, и равенство (11) принимает вид $R_dz=iz$. С одной стороны, геометрически очевидно, что $R_d(1)=i$, $R_d(i)=-1$. С другой стороны, $i\cdot1=i$, $i\cdot i=-1$. Таким образом,

$$R_d(1)=i\cdot1,\ R_d(i)=i\cdot i.$$

Из формулы (9) непосредственно вытекает

$$iz=i\cdot(x+iy)=x\cdot i+y(-1)=$$
$$=xR_d(1)+yR_d(i)=R_d(x\cdot1+y\cdot1)=$$
$$=R_d(x+iy)=R_d(z).$$

Таким образом, формула (11) доказана для $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

Пусть теперь α — произвольное действительное число. При $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$ получаем

$$z\cdot i=iz=R_{\alpha}(z)=R_{\alpha}(\cos\alpha+i\sin\alpha)=$$
$$=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=$$
$$=R_{\alpha}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=R_{\alpha}(i).\quad(12)$$

Таким образом, формула (11) доказана при $z=i$.

Перейдем теперь к доказательству формулы (11) для произвольного комплексного числа

$$z=x+iy.$$

В силу формул (9), (10), (12) имеем

$$R_{\alpha}(z)=R_{\alpha}(x+iy)=xR_{\alpha}(1)+yR_{\alpha}(i)=$$
$$=x(\cos\alpha+i\sin\alpha)+$$
$$+y(\cos\alpha+i\sin\alpha)i=$$
$$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)\,(x+iy)=$$
$$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)z.$$

Таким образом, формула (11) полностью доказана.

Применяя формулу (11) к комплексному числу $z=\cos\beta+i\sin\beta$, получаем

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=$$
$$=R_{\alpha}(\cos\beta+i\sin\beta)=R_{\alpha}(R_{\beta}(1))=$$
$$=R_{\alpha+\beta}(1)=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta).$$

Таким образом,

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)\,(\cos\beta+i\sin\beta)=$$
$$=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta).$$

Производя перемножение комплексных чисел, стоящих в левой части, по формуле (4), мы получим

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)\,(\cos\beta+i\sin\beta)=$$
$$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+$$
$$+(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\,i.$$

Значит, мы получили формулы для косинуса и синуса суммы:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Для произвольных комплексных чисел, которые мы запишем в виде $r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, $s(\cos\beta+i\sin\beta)$, получаем

$$r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\cdot s(\cos\beta+i\sin\beta)=$$
$$=rs(\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)).\quad(13)$$

Таким образом, *при перемножении двух комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.*

Формулу (13) очевидным образом можно распространить на произвольное число сомножителей. Если все эти сомножители равны между собой и равны комплексному числу $r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, то мы получаем

$$[r(\cos\alpha+i\sin\alpha)]^n=$$
$$=r^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha).$$

Эта формула очень интересна. Она дает возможность извлечь корень n-й степени из произвольного комплексного числа $\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Именно, оказывается, что число корней n-й степени из числа $\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)\neq 0$ равно n, причем корни эти расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{\varrho}$ с центром в начале координат и составляют вершины правильного n-угольника. Это утверждение я предоставляю для доказательства читателям.

В частности, корень n-й степени из единицы имеет n значений, которые являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в единичный круг, причем одна из его вершин есть единица (рис. 2). В виде формулы эти корни записываются следующим образом:

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

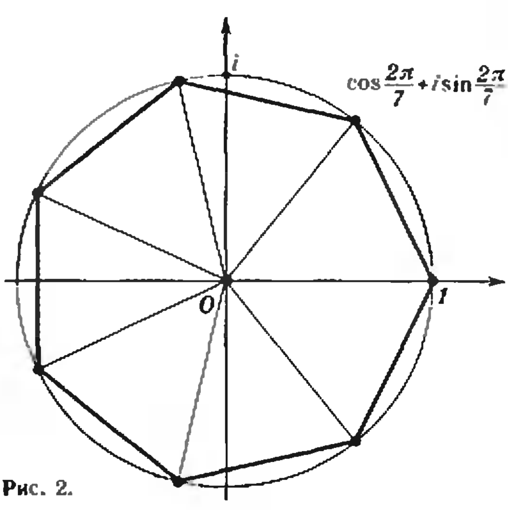


Рис. 2.

В. Лишевский

Даниил Бернулли

... для меня истинное удовольствие всю жизнь состоять в русской императорской службе...

Д. Бернулли

Говорят, что природа, создав гения, затем отдыхает, творя его потомков. И это, в основном, верно. Но не бывает правил без исключения, и одно из них — семья Бернулли. На протяжении ста лет род Бернулли дал человечеству десятки выдающихся деятелей науки — математиков, физиков, врачей, юристов, риториков... Многие из них были членами различных академий, пятеро — академиками Петербургской академии наук.

Наиболее известны братья Якоб (1654—1705) и Иоганн (1667—1748) Бернулли и сын Иоганна Даниил.

Даниил Бернулли родился 29 января 1700 года в Гронингене (Голландия), где его отец преподавал математику в университете. В 1705 году семья переехала в город Базель (Швейцария), где Иоганн Бернулли «унаследовал» место профессора математики после смерти своего старшего брата Якоба.

Даниил учился в Базельской гимназии. После окончания гимназии в 1713 году его отправили во Францию совершенствовать знание французского языка. После возвращения на родину в 1716 году он получил звание магистра философии.

По настоянию отца Даниил занялся изучением медицины. Он учился в Гейдельберге, в Страсбурге и после защиты диссертации «О дыхании» в 1720 году становится лиценциатом медицины. Но сердце Даниила не лежало к врачебной деятельности. «...Пример членов его семьи, а именно его отца и старшего брата Николая, а также наклонности его собственной души влекли его к математическим наукам и к изучению природы»,— так писал о себе в третьем лице Даниил Бернулли в «Автобиографии», сохранившейся в архиве Академии наук СССР.

В 1724 году выходит в свет первый научный трактат Даниила Бернулли «Математические упражнения». В этом же году он получает предложение возглавить академию в Генуе. Пока Даниил раздумывал, пришло приглашение из России поступить на службу в только что созданную Петром I Петербургскую академию.

Предложение было заманчивым, но Даниилу не хотелось расставаться с братом Николаем, с которым его связывала трогательная дружба. Затруднение разрешилось очень просто. Тогдашний президент Петербургской академии Л. Л. Блюментрост пригласил обоих Бернулли, и в октябре 1725 года братья прибыли в Петербург. Даниил получил кафедру физиологии, Николай — кафедру математики.

Братья активно включились в работу академии. В протоколе заседания от 14 января 1726 года записано: «Даниил Бернулли, физиологии профессор, начала математические к Теории медической потребныя, да приличиость их к физиологии научит: перед обедом от часа 7 до 8. Николай Бернулли, математики профессор, о тех частях математики, которые к физике привязаны, а особливо о механике читать будет с 8 до 9».

Деятельность Николая Бернулли в Петербургской академии наук продолжалась недолго. Климат северной столицы оказался для него слишком суровым. Через восемь месяцев после приезда в Петербург Николай Бернулли умер.

Даниил Бернулли оставался в Петербурге до лета 1733 года, а затем вернулся в Базель. Здесь он получил кафедру медицины в университете, но занимался, в основном, экспериментальной физикой. В 1750 году он возглавил кафедру физики, которую и занимал до последних дней жизни.

После отъезда из России Даниил Бернулли поддерживал тесную связь с Петербургской академией наук, почетным членом которой он остался. Он переписывался с петербургскими учеными, посылал свои труды для публикации. Из 75 научных работ Даниила Бернулли 47 опубликованы в трудах Петербургской академии наук.

Вклад Даниила Бернулли в науку трудно переоценить. Он занимался уравнением Рикатти $y' = ax^n + by^2$, колебаниями струн и стержней, теорией вероятностей, рядами, пределом выражения $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$... Вместе с М. В. Ломоносовым он стоял у истоков кинетической теории газов. В его трудах можно найти предвосхищение законов Гей-Люссака, Клапейрона и Шарля...

Даниил Бернулли был первым, кто высказал суждение о том, что давление газа обусловлено тепловым движением молекул. В своей «Гидродинамике», принесшей ему мировую славу, он пишет:

«Представьте себе вертикально поставленный цилиндрический сосуд *ADCB* (рис. 1) и в нем подвижную крышку *EF*, поверх которой лежит груз *P*. Пусть в пространстве *EDCF* содержатся мельчайшие частицы, движущиеся чрезвычайно быстро в различных направлениях; таким образом частицы, ударяясь о крышку и поддерживая ее своими непрерывно повторяющимися ударами, образуют упругую жидкость, которая при удалении или уменьшении тяжести *P* расширяется, а при увеличении сжимается...»

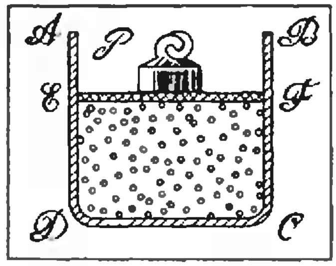


Рис. 1.

«Гидродинамика» была написана в Петербурге и издана в Страсбурге в 1738 году. В предисловии к ней Даниил Бернулли пишет: «...Я охотно объявляю, что главнейшая часть этой работы обязана руководству, замыслам и поддержке со стороны Петербургской Академии наук... Настоящая моя работа преследует единственную цель: принести пользу Академии, все усилия которой направлены к тому, чтобы содействовать росту и общественной пользе благих наук».

Даниил Бернулли неоднократно подчеркивал, что как ученый он сформировался в Петербургской академии наук, что свои открытия в науке он совершил благодаря тем исключительным условиям, которые были созданы в России для жизни и творчества ученых. В гидродинамике Даниил Бернулли дал уравнение установившегося движения идеальной несжимаемой жидкости. Теперь это уравнение называют уравнением Бернулли.

Рассмотрим идеальную жидкость, текущую по трубе с переменным сечением (рис. 2). (Говоря «идеальная жидкость», мы имеем в виду, что в жидкости отсутствует трение.) Через сечение s_2 жидкость течет с большей скоростью, чем через сечение s_1. Действительно, поскольку жидкость не сжимаема, через любое сечение за одно и то же время должна пройти одна и та же масса

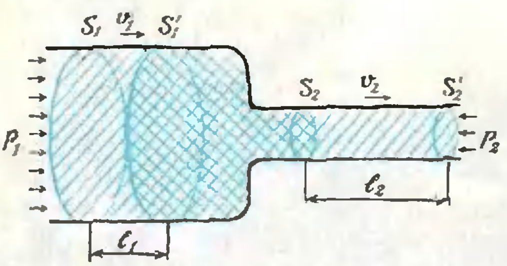


Рис. 2.

жидкости, то есть

$$\varrho v_1 s_1 t = \varrho v_2 s_2 t.$$

Из этого условия — его называют условием неразрывности для установившегося течения — следует, что $v_1 : v_2 = s_2 : s_1$ и $v_2 > v_1$ (при $s_1 > s_2$).

Представим себе, что некоторая масса жидкости, заключенная между сечениями s_1 и s_2, за время Δt переместилась так, что сечение s_1 перешло в сечение s_1', а сечение s_2 — в сечение s_2'. Потенциальная энергия тяготения этой массы осталась прежней, а кинетическая энергия изменилась на величину

$$\Delta T = \frac{\Delta m_2 \cdot v_2^2}{2} - \frac{\Delta m_1 \cdot v_1^2}{2},$$

где Δm_1 — масса жидкости между сечениями s_1 и s_1', а Δm_2 — масса жидкости между сечениями s_2 и s_2'. Это изменение кинетической энергии равно работе внешних сил за время Δt. Внешними по отношению к выбранному объему жидкости силами являются силы давления $F_1 = p_1 s_1$ и $F_2 = p_2 s_2$. Следовательно,

$$\frac{\Delta m \cdot v_2^2}{2} - \frac{\Delta m \cdot v_1^2}{2} = p_1 s_1 l_1 - p_2 s_2 l_2. \qquad (*)$$

Из условия неразрывности следует, что $s_1 l_1 = s_2 l_2$ и $\Delta m_1 = \Delta m_2 = \varrho s_1 l_1 = \varrho s_2 l_2$ (ведь жидкость несжимаема). Учитывая эти соотношения, из (*) мы получаем следующее:

$$\varrho v_2^2 \frac{s_1 l_1}{2} - \varrho v_1^2 \frac{s_1 l_1}{2} = (p_1 - p_2) s_1 l_1,$$

откуда

$$\frac{\varrho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\varrho v_2^2}{2} + p_2 = \text{const}.$$

Это и есть уравнение Бернулли для жидкости, текущей по горизонтальной трубе. Если в своем течении жидкость перемещается и по вертикали, необходимо учитывать потенциальную энергию тяготения. В общем виде уравнение Бернулли записывается так:

$$\frac{\varrho v^2}{2} + p + \varrho g h = \text{const}.$$

Это же уравнение справедливо и для газов, текущих со сравнительно небольшими скоростями.

Уравнение Бернулли имеет большое значение в теоретической и практической гидромеханике. Оно используется при расчете различных трубопроводов, насосов и расходомеров, исследовании процессов фильтрации и т. п. Вместе с некоторыми другими уравнениями уравнение Бернулли, записанное для среды с переменной плотностью ϱ, составляет основу газовой динамики. Даниилу Бернулли совместно с Леонардом Эйлером принадлежит главная заслуга в разработке механики жидких тел.

Можно без преувеличения сказать, что наука была единственной страстью Даниила Бернулли. Из-за занятий наукой у него были натянутые отношения с отцом, с которым они все время вели споры о приоритете. Отец и сын независимо занимались одними и теми же проблемами и занимались успешно. Об этом ярко свидетельствует следующий факт. В 1732 году Парижская академия наук объявила конкурс на тему «О взаимном наклонении планет». Две работы из поступивших на конкурс были признаны лучшими, и премию было решено разделить между их авторами. Когда вскрыли конверты с девизами, то оказалось, что эти авторы — отец и сын Бернулли. «Я радуюсь, что и твой сын носит печать Бернулли и хранит наследственный блеск фамилии», — писал Лейбниц Иоганну Бернулли.

Даниил Бернулли неоднократно получал премии Парижской академии наук. Ими были отмечены его работы «О лучшем способе устройства якорей» (1738), «О морском приливе и отливе» (1740), «О наилучшем способе устройства магнитных стрелок наклонения» (1743), «О лучшем способе определения времени в море» (1745—1746), «Теория магнита» (1742, 1744, 1746)...

Научный авторитет Даниила Бернулли был очень высок. Свидетельством этого было избрание его членом многих иностранных Академий наук (помимо Петербургской) — Берлинской (1747), Парижской (1748), Лондонского Королевского общества (1750).

До последних дней жизни он занимался научной деятельностью. 17 марта 1782 года слуга нашел его в кресле заснувшим навсегда.

(Окончание см. на с. 15)

А. Варламов, А. Шапиро

В голубом просторе

Оглядываясь вокруг, мы, чаще всего, видим лишь то, с чем уже знакомы, к чему привыкли. Между тем процесс познания почти всегда начинается с новых наблюдений.

Острой, профессиональной наблюдательностью отличаются художники, поэтому мир, отраженный глазами художников-реалистов в их пейзажах, особенно ярок и многокрасочен, а отдельные явления природы проступают явственнее. И при этом даже очень хорошему художнику нет нужды понимать подчас весьма сложную сущность происходящих в природе явлений, которые он реалистически отображает на своих полотнах. Но вот изучать окружающий мир по картинам хорошего художника-пейзажиста можно даже лучше, чем в натуре, ибо в пейзаже автор как бы останавливает мгновенье, интуитивно усиливая существенное и опуская лишнее, случайное.

Всмотритесь в картину Аркадия Александровича Рылова «В голубом просторе». «Белые птицы, как и облака, легко парят, купаясь в голубой лазури. И так же плавно, как белая птица, по спокойно колышащимся синим волнам океана скользит покрытый парусами корабль»,— так описывает эту картину известный искусствовед А. Федоров-Давыдов. Любуясь в Третьяковской галерее этим замечательным полотном, забываешь, что стоишь в зале музея, и ощущаешь себя участником этого праздника природы.

А теперь отвлечемся от живописи и оглядимся вокруг глазами исследователя. Где же мы оказались?

На этот вопрос ответить несложно — виднеющийся невдалеке скалистый остров покрыт снегом, а море совсем не зимнее, так что мы находимся, вероятно, в полярных широтах.

А откуда художник писал пейзаж — со скалистого уступа берега? или с борта корабля?

Скорее всего, он был на корабле, так как на переднем плане картины не видно прибоя, распределение волн симметрично и не искажено близким присутствием берега.

Давайте теперь попытаемся оценить скорость ветра, который раздувает паруса корабля, скользящего вдали. Мы не первые, кто задается вопросом оценки скорости ветра по величине волн или по другим проявлениям в окружающей нас природе. Еще в 1806 году английский адмирал Ф. Бофорт разработал двенадцатибалльную шкалу для приближенной оценки скорости ветра по его действию на наземные предметы и по волнению в открытом море. Эта шкала принята Всемирной метеорологической организацией, ею пользуются и поныне.

Взглянув на картину, видим, что, согласно таблице Бофорта, ветер «слабый» со скоростью 5 м/с, волнение на воде легкое, изредка образуются маленькие белые барашки. А кстати, почему они белые и так сильно отличаются по цвету от сине-зеленого моря?

Цвет моря определяется многими факторами, среди которых важнейшими являются положение Солнца, цвет неба, рельеф поверхности моря, глубина моря; если глубина невелика, то важным фактором является наличие или отсутствие в воде водорослей и содержание в ней взвешенных твердых частиц. Все эти факторы влияют на отражение света от поверхности моря, на поглощение и рассеяние света в глубине. Поэтому однозначное объяснение видимого цвета моря просто невозможно. Но кое в чем разобраться можно. Так,

Шкала Бофорта

Баллы Бофорта	Словесное определение силы ветра	Средняя скорость ветра (м/с) на высоте 10 м	Действие ветра
0	Штиль	$0\div0{,}2$	Зеркально гладкое море
1	Тихий	$0{,}3\div1{,}5$	На море легкая рябь; пены на гребнях нет. Высота волн до 0,1 м
2	Легкий	$1{,}6\div3{,}3$	На море короткие волны с максимальной высотой до 0,3 м
3	Слабый	$3{,}4\div5{,}4$	Легкое волнение на воде; изредка образуются маленькие барашки. Высота волн до 0,6 м
4	Умеренный	$5{,}5\div7{,}9$	Белые барашки на море видны во многих местах. Максимальная высота волн до 1,5 м
5	Свежий	$8{,}0\div10{,}7$	Повсюду видны белые барашки. Средняя высота волн 2 м
6	Сильный	$10{,}8\div13{,}8$	Белые пенистые гребни занимают значительные площади, образуется водяная пыль. Максимальная высота волн до 4 м
7	Крепкий	$13{,}9\div17{,}1$	Гребни волн срываются ветром. Максимальная высота волн до 5,5 м
8	Очень крепкий	$17{,}2\div20{,}7$	Сильное волнение на море. Максимальная высота волн до 7,5 м
9	Шторм	$20{,}8\div24{,}4$	Очень сильное волнение на море. Максимальная высота волн до 10 м
10	Сильный шторм	$24{,}5\div28{,}4$	Поверхность моря белая от пены. Сильный грохот волн подобен ударам. Очень высокие волны — до 12,5 м
11	Жестокий шторм	$28{,}5\div32{,}6$	На море исключительно высокие волны — до 16 м. Небольшие суда временно скрываются из виду.
12	Ураган	$>32{,}7$	—

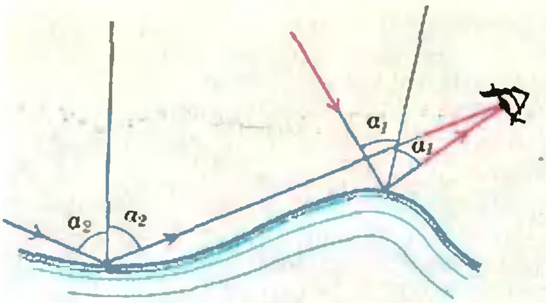


Рис. 1.

например, можно понять, почему цвет ближайших к художнику волн гораздо темнее общего фона моря, а к горизонту море становится светлее.

Степень отражения световой волны при падении на границу раздела двух сред с разными оптическими плотностями определяется углом падения α и относительным показателем преломления сред n. Количественно ее характеризуют коэффициентом отражения R, который равен отношению интенсивностей отраженного и падающего света*). Коэффициент отражения зависит от угла падения. Чтобы обнаружить эту зависимость, понаблюдайте, как отражаются лучи дневного света от поверхности полированного стола. Здесь оптически более плотной средой служит прозрачный слой лака. Вы увидите, что при скользящих лучах ($\alpha \to \pi/2$) отражается практически весь световой поток ($R \to 1$), а с уменьшением угла падения все большая часть светового потока проникает в среду с большей оптической плотностью и все меньшая отражается от поверхности раздела. Коэффициент отражения убывает с уменьшением угла падения.

Обратимся теперь к схематическому изображению волны, показанному на рисунке 1. Из рисунка видно, что углы падения α_1 и α_2 лучей, попадающих в глаз наблюдателя от «фронта» волны и от «спины», разные и $\alpha_2 > \alpha_1$. Поэтому от удаленных областей моря в глаз наблюдателя попадает больше отраженного света, и передний фронт волны виден более темным, чем ровная поверхность моря сзади. В случае многих волн на поверхности моря угол α, вообще говоря, меняется в зависимости от того, смотрим мы на гребень волны или на впадину вдалеке от фронта волны. Однако с удалением от переднего фронта угловой размер темных гребней быстро уменьшается, а угол α_2 все равно остается большим угла α_1. По мере удаления к горизонту картина волн как бы усредняется, наблюдатель уже не видит долин между волнами, и постепенно темные склоны волн исчезают совсем.

Поэтому на картине области моря вблизи горизонта кажутся более светлыми, чем на переднем плане.

Теперь мы можем объяснить, почему барашки на гребнях волн белые. Бурлящая вода в барашках содержит множество пузырьков воздуха, которые непрерывно движутся, лопаются, меняют форму. Углы отражения меняются от точки к точке и во времени. Поэтому в пене барашка солнечные лучи почти полностью отражаются, и барашки воспринимаются белыми.

На цвет моря в большой степени влияет цвет неба над ним. И если первый, как мы уже говорили, предсказать практически невозможно, то цвет неба можно понять на основании физических законов. Ясно, что цвет неба определяется рассеянием солнечных лучей в земной атмосфере. Но почему рассеяние лучей Солнца, спектр которого сплошной, то есть содержит все длины волн, приводит к синему, голубому небу, а само Солнце мы видим желтым? Разобраться в этом вопросе нам поможет закон Рэлея для рассеяния света.

В 1898 году английский физик лорд Рэлей создал теорию рассеяния света на частицах, размеры которых значительно меньше длины волны рассеиваемого света ($d \ll \lambda$). Найденный им закон гласит: *интенсивность рассеянного света пропорциональна четвертой степени частоты световой волны, или обратно пропорциональна четвертой степени длины*

*) Интенсивностью света называют среднее (по времени) значение светового потока через единицу поверхности площадки, перпендикулярной к направлению распространения света.

волны. Рэлей применил этот закон к рассеянию света в атмосфере, считая, что рассеяние солнечных лучей происходит на молекулах газов, входящих в состав воздуха (поэтому иногда сформулированный выше закон называют «законом синего неба».)

Отношение длины волны красного света к длине волны синего света составляет 6500Å/4500Å≈1,44. Возводя это число в четвертую степень, получаем 4,3. Таким образом, согласно закону Рэлея интенсивность рассеянного синего света в четыре раза превышает интенсивность рассеянного красного света, и слой воздуха толщиной в десятки километров приобретает окраску с заметным преобладанием синих и голубых цветов. А видимый солнечный свет, который дошел до нас сквозь «заслон» атмосферы, в большой степени лишен коротковолновой части своего спектра. Поэтому Солнце, которое мы видим в прошедших сквозь атмосферу лучах, принимает слабый желтый оттенок. Он может становиться сильнее, оранжевее и краснее по мере захода Солнца, когда солнечным лучам приходится преодолевать больший путь в атмосфере (при восходе Солнца, естественно, смена цветов происходит в обратном порядке).

Заметим, что в законе Рэлея предполагается, что $\lambda \gg d$, однако сама величина d в выражение для интенсивности не входит. Этот факт привел к тому, что заблуждение относительно природы рассеивателей солнечного света в атмосфере, с легкой руки Рэлея, просуществовало вплоть до середины двадцатого века. И только в 1940 году советский физик академик Л. И. Мандельштам показал, что в действительности рассеяние света в атмосфере происходит не на молекулах газов, входящих в состав воздуха, а на весьма неожиданных объектах — неоднородностях плотности воздуха. Но откуда же берутся эти неоднородности? Ведь воздух находится в состоянии термодинамического равновесия, а если даже дует ветер, то связанные с ним неоднородности имеют размеры, превышающие длину волны света в гигантское число раз, и на рассеянии света сказываться никак не могут.

Для понимания природы неоднородностей показателя преломления света давайте более детально разберемся с понятием термодинамического равновесия. Для простоты рассмотрим некоторый макроскопический объем газа, находящийся в замкнутом сосуде.

Физика рассматривает системы, состоящие из гигантского числа частиц, поэтому единственно возможный путь описания свойств таких систем — статистический. Статистический подход означает, что мы следим не за состоянием каждой молекулы в отдельности, а вычисляем средние значения соответствующих физических величин для всей системы в целом. При этом вовсе не обязательно, чтобы для всех молекул значение рассматриваемой физической величины равнялось соответствующему среднему. При рассмотрении нашего макроскопического объема газа наиболее вероятным будет состояние, в котором молекулы газа распределены равномерно по всему объему сосуда. Однако, благодаря тепловому движению молекул, всегда имеется отличная от нуля вероятность того, что концентрация молекул в некоторой области сосуда на некоторое время превысит среднюю концентрацию молекул в рассматриваемом объеме (при этом, естественно, в другой области рассматриваемого объема концентрация молекул на это время понизится). Теоретически возможно даже такое состояние, когда все молекулы газа соберутся в одной половине объема рассматриваемого сосуда, а вторая окажется абсолютно пустой. Но вероятность такого события выражается столь малым числом, что нет никакой надежды на его реализацию даже в пределах времени существования Вселенной, которое по современным представлениям составляет 10^{13} лет.

Однако небольшие отклонения физических величин от их средних значений возможны и не только возможны, но и постоянно происходят благодаря тепловому движению молекул. Эти отклонения называются флуктуациями (от латинского слова fluctuari — колебаться). Именно они и приводят к тому, что в некоторых областях плотность газа возрастает, а в других убывает, что сказывается на величине коэффициента преломления света в данных областях.

Если мы теперь вернемся к рассмотрению рассеяния света в атмосфере, то все рассуждения, проведенные для ограниченного объема газа, останутся справедливыми. Кроме того, так как воздух является смесью различных газов, различие в тепловом движении молекул разных газов приводит к дополнительным возможностям появления локальной неоднородности коэффициента преломления света, связанной с флуктуациями.

Характерный размер областей неоднородности коэффициента преломления света (неоднородности плотности), возникающих рассмотренным флуктуационным путем, зависит от температуры. Для слоев атмосферы, в которых происходит основное рассеяние солнечного света, размеры таких неоднородностей оказываются много меньшими длины волны видимого света, но значительно превышающими размеры молекул газов, входящих в состав воздуха. Поэтому рассеяние света происходит именно на них, а не на молекулах, как это предполагал Рэлей.

И все же небо мы видим синим, а не фиолетовым, хотя закон Рэлея предсказывает преобладание фиолетового цвета. Оказывается, что это расхождение обусловлено двумя причинами. Во-первых, в спектре сол-

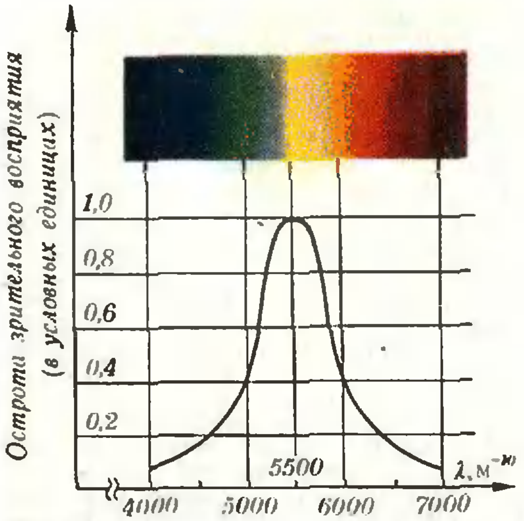


Рис. 2.

нечного света гораздо меньше фиолетовых лучей, чем синих. Вторым виновником кажущегося расхождения теории и практики является наш «регистрирующий прибор» — глаз человека с нормальным зрением. Дело в том, что острота зрительного восприятия человеческого глаза существенно зависит от длины волны света. На рисунке 2 приведена экспериментально построенная кривая, характеризующая эту зависимость. Из рисунка видно, что на фиолетовые лучи глаз реагирует гораздо слабее, чем на сине-зеленые. Именно поэтому воспринимаемые человеческим глазом рассеянные солнечные лучи практически не имеют фиолетовой компоненты.

А почему же на голубом небе мы ясно видим белые облака? Разве при рассеянии света на составляющих их частицах не справедливы выводы из закона Рэлея?

Дело в том, что облака состоят из мельчайших капель воды или кристалликов льда, размеры которых, однако, значительно превышают длины волн видимого света. Поэтому при рассеянии солнечного света на частицах, составляющих облака, закон Рэлея неприменим — рассеяние света всех длин волн происходит приблизительно с одинаковой интенсивностью, и облака воспринимаются белыми. Что мы и видим на картине.

Всмотритесь теперь в форму облаков. Верх облаков на картине — рыхлый и клубящийся, а вот нижняя их граница резко очерчена. С чем это может быть связано? Ответы на этот вопрос могут быть разные, и мы предложим объяснение, представляющееся нам наиболее простым и красивым.

Капельки воды, из которых состоит облако, возникают в результате конденсации водяного пара, содержащегося в воздухе. По мере подъема над уровнем моря давление и температура падают. Очевидно, нижняя граница облака определяется той высотой над уровнем моря, на которой атмосферные условия (давление воздуха и температура) соответствуют условиям конденсации водяного пара.

На рисунке 3 приведена зависимость давления насыщенного пара от температуры. Если на некоторой высоте в атмосфере давление и температура окажутся соответствующими точке на p—T-диаграмме насыщенного пара, начнется конденсация.

Из соображений симметрии понятно, что для высот, много меньших радиуса Земли и расстояния до ближайшего берега, поверхности с постоянной температурой и давлением представляют собой плоскости, параллельные поверхности моря. Вблизи поверхности моря падение температуры происходит достаточно быстро — примерно один градус на сотню метров (вообще говоря, зависимость температуры воздуха от высоты далеко не линейна, но по порядку величины до высот в не-

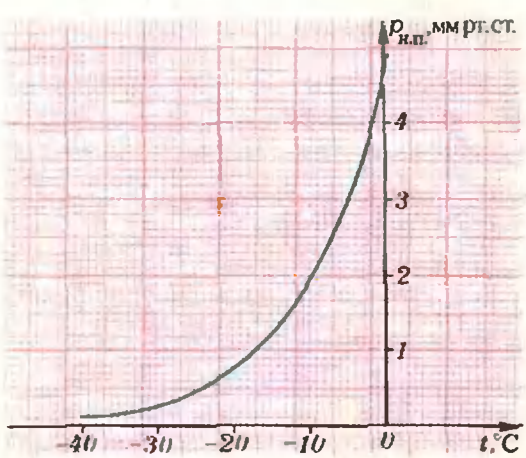


Рис. 3.

сколько километров приведенные данные верны). Если учесть, что размеры облака по горизонтали составляют сотни и тысячи метров, станет понятным, что предлагаемое объяснение приводит к достаточно четко очерченной нижней границе облака, так как разброс высот, на которых будет начинаться конденсация водяного пара,— порядка нескольких десятков метров, что гораздо меньше горизонтальных размеров облака. На заднем плане картины мы видим целый ряд облаков с плоскими нижними границами, которые висят на одном уровне над морем. Подумайте, справедливы ли приведенные соображения в случае, когда облако находится над сушей. Какие требования при этом нужно наложить на рельеф?

На переднем плане картины клином летит стая белых птиц. Впереди — сильный вожак стаи. Оказывается, что форма клина в целом для стаи является более выгодной — птицы, летящие вслед за вожаком, затрачивают меньше усилий, чем если бы они летели «вразброд». Для того чтобы понять, почему это так, давайте рассмотрим, за счет чего птице удается поддерживать себя в воздухе. Будем считать, что ветра нет и воздух неподвижен относительно Земли. Вниз на птицу действует сила тяжести mg. Для того чтобы удержаться на заданной высоте, птица, работая крыльями, создает потоки воздуха, направленные вниз, передавая воздуху в среднем за время Δt такой импульс Δp, что $\frac{\Delta p}{\Delta t}=mg$. Это и есть условие равновесия для птицы в вертикальном направлении. Кроме основных создаваемых потоков воздуха, направленных вниз, при подъеме крыльев для очередного взмаха птица создаёт более слабые восходящие потоки воздуха. Поэтому летящая вслед за вожаком птица может частично парить на таких восходящих потоках и, таким образом, прикладывать меньшие усилия для поддержания необходимой высоты. Аналогично поступают и последующие птицы в клине. Как установлено орнитологами, при дальних перелетах в некоторых стаях вожака временами подменяют другие сильные птицы стаи.

Подумайте, как должны быть смещены по фазе взмахи крыльев у птиц, последовательно летящих в клине (это смещение видно на картине).

* * *

Мы далеко не исчерпали всех тех вопросов и ответов, которые можно найти в картине «В голубом просторе». Пытливому и наблюдательному зрителю в этой картине могут открыться и другие, может быть, более интересные явления. Да и нет надобности ограничиваться картиной — интересные вопросы и задачи можно найти везде в окружающем нас повседневном мире.

Даниил Бернулли

(Начало см. на с. 7)

На заседании Парижской академии наук, посвященном памяти Даниила Бернулли, известный ученый-энциклопедист М. Кондорсе говорил: «...вкусы влекли его преимущественно к исследованию вопросов, которые представляют больше трудностей в приведении их к математическому аппарату, чем в решении, когда это приведение уже сделано. В задачах, которыми он занимался, он старался в самой их природе найти средства к их упрощению, к их приведению к простейшей форме, оставляя за вычислениями только то, что от них не может быть отнято. Он имел склонность пользоваться теорией для того, чтобы проникнуть глубже в познание природы, прилагая математику не только к умозрительной механике, к абстрактным законам тел, но также и к физике, к явлениям природы в ее реальном состоянии и к тем явлениям, которые нам доставляют наблюдения. Никто лучше его не умел находить в анализе средства для того, чтобы подвергнуть вычислениям все детали явления; никто лучше его не мог поставить опыт так, чтобы он мог дать подтверждение результатов теории или чтобы он мог служить основой вычислений. В полной мере он и философ, и физик...»

Самый тяжелый изотоп 107-го элемента

Известно, что тяжелые элементы периодической таблицы с порядковым номером больше ста получают искусственно, бомбардируя мишень, сделанную из другого тяжелого элемента, пучком ускоренных «тяжелых» ионов*). Летящее со скоростью, близкой к десятой доли скорости света, ядро-снаряд преодолевает электрические силы отталкивания ядра-мишени и сливается с ним.

Образовавшееся составное ядро, получив большой запас энергии, «нагревается». Нагретое ядро неустойчиво, и обычно за время порядка 10^{-20} с оно делится на два «осколка» — ядра атомов средней части периодической системы элементов.

*) «Тяжелым» называют ион атома с порядковым номером больше двух.

В редких случаях составное ядро, не успев поделиться, «охлаждается», потеряв энергию на «испарение» четырех-пяти нейтронов. В итоге рождается новый тяжелый элемент с порядковым номером, равным сумме порядковых номеров наряда и мишени.

Однако вероятность такого процесса очень мала. Нейтроны вылетают из нагретого ядра последовательно, один за другим, и на каждой ступени «выживает» только сотая часть атомных ядер — остальные ядра делятся. Так, после испарения четырех нейтронов лишь стомиллионная доля начальных ядер превращается в новые устойчивые ядра. Чем тяжелее ядро, тем труднее ему избежать деления. Особенно велики потери на деление в процессе синтеза элементов с порядковым номером больше ста пяти.

Выход был найден учеными Дубны. Они показали, что ядра-мишени и ядра-снаряды можно специально подобрать так, что при их слиянии образуются «холодные» составные ядра — ядра с небольшим избытком энергии. Например, при бомбардировке висмута хромом составная система охлаждается уже после вылета одного или двух нейтронов.

«Холодный» способ дал возможность ученым Дубны в 1974 году получить атомы 106-го элемента, а в 1976 году в Дубне же был открыт 107-й элемент (изотоп $^{261}107$).

По тому же пути пошли и немецкие физики. Недавно в Лаборатории тяжелых ионов в городе Дармштадте в реакции

$$^{209}_{83}\mathrm{Bi}+^{54}_{24}\mathrm{Cr}\rightarrow{}^{262}107+^{1}_{0}n$$

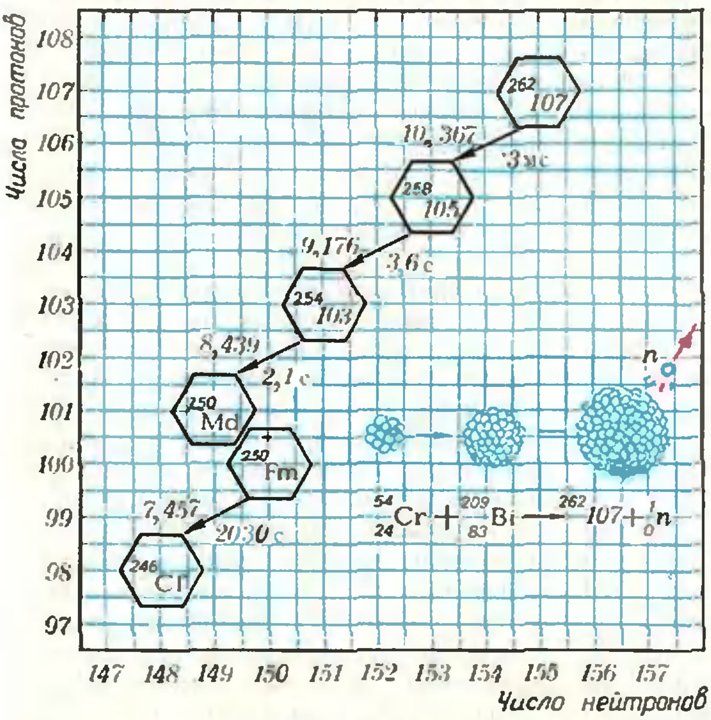
был получен ранее неизвестный изотоп 107-го элемента с атомной массой 262.

Ядра этого элемента, продукты слияния ядер висмута и хрома (энергия ядер хрома была равна 262 МэВ), вылетают из тонкой висмутовой мишени и попадают на полупроводниковый детектор. Прежде всего детектор регистрирует кинетическую энергию ядра и его координаты. Затем начинается регистрация ядерных превращений.

Ядро $^{262}107$ (см. рисунок) испускает альфа-частицу, при этом масса ядра уменьшается на 4 единицы, его заряд — на 2 единицы, и получается изотоп $^{258}105$. Детектор дает сведения о величине интервала времени с момента прибытия ядра до его распада и об энергии альфа-частицы. Ядра $^{258}105$ и $^{254}103$ тоже последовательно испускают альфа-частицы, в результате чего образуется ядро менделевия $^{250}_{101}\mathrm{Md}$. Оно испытывает уже другой вид превращений — захватывает орбитальный электрон и переходит в изотоп фермия $^{250}_{100}\mathrm{Fm}$, который в свою очередь испускает альфа-частицу и превращается в устойчивое ядро калифорния $^{246}_{98}\mathrm{Cf}$. Энергия излучаемой фермием альфа-частицы и его период полураспада хорошо известны; именно по этим данным ученые и сумели восстановить всю цепь превращений, достигнув вершины — изотопа $^{262}107$.

Ученые получили всего шесть атомов нового изотопа 107-го элемента, но основные характеристики его уже известны: энергия альфа-распада равна 10,367 МэВ и период полураспада — 4,2 мс.

В. Кузнецов



Цепь альфа-распада нового изотопа 107-го элемента с атомной массой 262. Цифры слева от стрелок обозначают энергию альфа-частицы (измеренную в МэВ), справа от стрелок — время между радиоактивными распадами.

И. Алексеев, Д. Свирида

И светит и греет

В заочном конкурсе III Московского турнира юных физиков была такая задача:

> Свеча при горении светит и греет. Определите теплотворную способность парафиновой свечи.

Много различных решений представили жюри участники конкурса. Одни решения базировались на непосредственном нагревании свечой какого-либо тела с известной теплоемкостью. Главный недостаток этого метода в том, что свеча нагревает не только выбранное тело, но и окружающую среду, а учесть это практически невозможно. Другие решения основывались на явлении конвекции, но до конца доведены не были из-за сложности математических расчетов. Были и такие предложения: окружить свечу металлической оболочкой какой-нибудь простой формы и рассчитать тепловой поток через нее при установившихся температурах внутри и снаружи. Недостаток этого метода — в необходимости подачи кислорода для горения свечи, что связано с дополнительными потерями тепла.

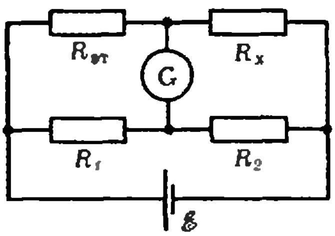


Рис. 1.

Наиболее рациональным для решения данной задачи жюри признало так называемый компенсационный, или сравнительный, метод. Вообще говоря, это один из важнейших методов экспериментальной физики. Он позволяет находить значения физических величин не непосредственно (что часто невозможно сделать достаточно точно), а сравнивая их с эталонными значениями. Классическим примером применения этого метода является измерение неизвестных сопротивлений с помощью мостика Уитстона (рис. 1). Если ток через гальванометр G не течет, выполняется соотношение (проверьте самостоятельно)

$$\frac{R_{эт}}{R_x} = \frac{R_1}{R_2}, \text{ или } R_x = R_{эт}\frac{R_2}{R_1}.$$

Здесь неизвестное сопротивление R_x сравнивается с эталонным сопротивлением $R_{эт}$ (отношение R_2/R_1 легко измерить, например — с помощью реохорда). Такой метод и был применен нами для определения тепловой мощности свечи.

Представим себе свечу, помещенную в трубу, через которую пропускается воздух. Тепло, излучаемое свечой, выходит частично вместе с воздухом, а частично — через стенки трубы. Теперь заменим свечу каким-нибудь другим излучателем, похожим по форме и размерам на свечу, но мощность которого известна и притом может изменяться. Например — электрическим нагревателем. Меняя мощность нагревателя, добьемся равенства потоков тепла, уносимых воздухом в обоих случаях. Так как условия опытов не меняются, тепловые потоки, выходящие через стенки трубы, тоже одинаковы. Следовательно, одинаковы и суммарные мощности свечи и нагревателя. Определив мощность электрического нагревателя, как произведение тока на напряжение, найдем тепловую мощность свечи.

Заметим, что важным преимуществом данного метода является исследование стационарного процесса, когда вся энергия сгорания свечи выделяется в виде тепла.

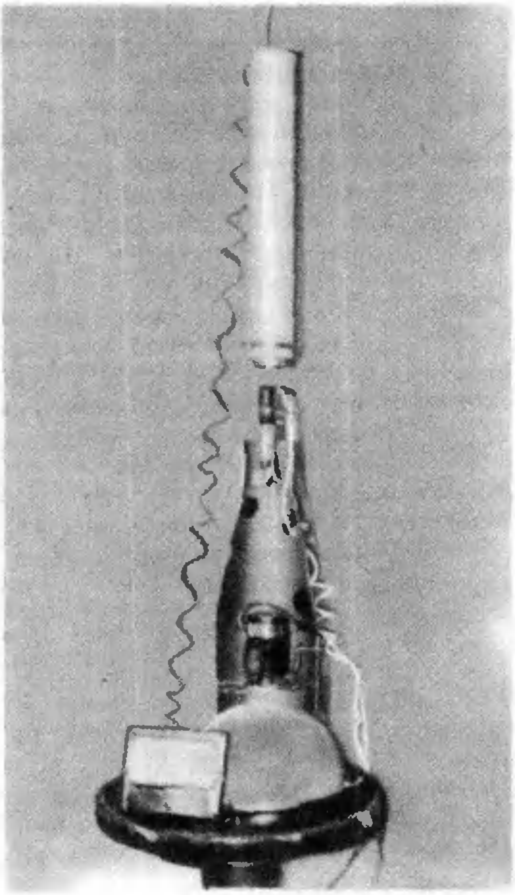


Рис. 2.

На рисунке 2 приведена фотография установки, с которой мы проводили опыты, а на рисунке 3 — схема этой установки. Воздух в трубу *1* подается с помощью вентилятора *2*, который позволяет регулировать скорость воздушного потока, чтобы добиться более полного сгорания топлива и стационарности потока. На выходе трубы установлен термодатчик *3*; он позволяет с большой точностью контролировать равенство температур выходящего воздуха в различных опытах. На решетку *4* ставится блюдце *5* для сбора стекающего парафина. Пламя свечи *6*, установленной на блюдце, окружается длинным закопченным металлическим цилиндром *7*. Через его верхнее отверстие (достаточно удаленное от пламени свечи) выходит пренебрежимо мало света. (В наших опытах световой поток, выходящий через отверстие, составлял около 4% от всей световой мощности, излучаемой свечой). Практически весь свет поглощается цилиндром и, превращаясь в тепло, отдается воздуху.

В качестве электрического нагревателя мы использовали проволочный реостат (залитый керамикой) сопротивлением 550 Ом и номинальной мощностью 20 Вт (в опытах мощность значительно превышала номинальную и достигала ~50—120 Вт).

Для определения теплоты сгорания свечи, кроме ее тепловой мощности, надо знать еще расход парафина в единицу времени. Это можно сделать, взвесив собранный на блюдце парафин и измерив время горения свечи (~3—4 минуты). При этом надо иметь в виду, что сначала процесс горения не будет стационарным. Однако момент установления стационарного режима легко определить с помощью термодатчика —

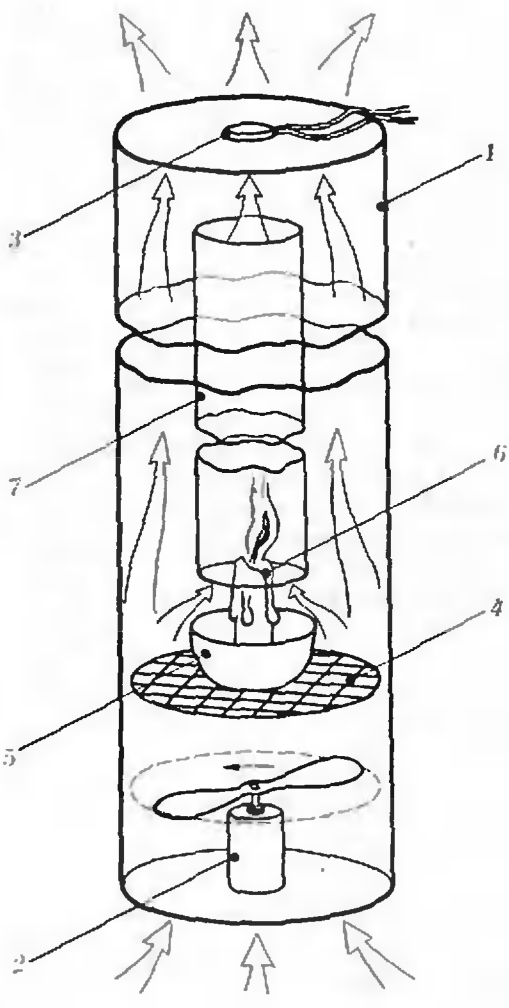


Рис. 3.

нужно заметить, когда температура выходящего воздуха престанет изменяться. Измерив массу сгоревшего к этому моменту парафина, надо будет учесть ее при определении расхода парафина в установившемся процессе.

Предлагаемую нами установку нетрудно собрать в школьных условиях.

В заключение — немного о погрешностях измерений в наших опытах. При горении свечи происходит изменение химического состава, а значит, и объема газа. Оценим соответствующую ошибку. Запишем уравнение реакции горения свечи:

$$2C_nH_{2n}+3nO_2 \rightarrow 2nCO_2+2nH_2O,$$

где C_nH_{2n} — приближенная формула вещества, составляющего свечу. В реакцию вступает $3n$ молей кислорода, а выходит $4n$ молей газа. Кислород берется из воздуха, где он составляет примерно пятую часть. Следовательно, если в воздухе сгорают все $3n$ молей кислорода, то на вошедшие $15n$ молей воздуха приходится $16n$ молей вышедшего газа. Этому соответствует изменение объема на 6—7%. На самом деле сгорает не весь кислород, а всего лишь несколько процентов, поэтому изменением объема газа при горении можно пренебречь.

Ошибки в измерении массы сгоревшего парафина и мощности нагревателя обусловлены точностью соответствующих измерительных приборов. В наших опытах ошибка в определении массы составляла около 3%, а в определении мощности — около 2%. Таким образом, общая ошибка в измерении теплоты сгорания свечи в наших опытах составляла приблизительно 5%.

Все врут календари?

И какой же читатель не любит «Клуб 12 стульев», что широко распахнул дверь в «Литературной газете»? Здесь всегда в широком ассортименте смех, да и не только... В общем, как говорится, клуб заслуженно пользуется заслуженным.

Разные подручные средства используют авторы для поддержания в клубе атмосферы сатиры и юмора. Нет-нет, но вспоминают они даже про физику с математикой. То любимейший людовед и душелюб Евг. Сазонов выступит в новом (для себя) жанре стихотворных «Математизмов». То в качестве неназойливого теста для проверки интеллекта на художественной заставке появятся уравнения Максвелла с ошибкой.

А в номере от 1 января 1981 г. стенгазета клуба «Рога и копыта» в специальном новогоднем выпуске разгласила результаты совершенно уникальный «расчетов века».

Если с 1 января начать ежедневно откладывать в копилку по 1 коп и завещать это занятие своим потомкам, то ровно через миллион лет у вас наберется 3 652 500 рублей.

Как нам сообщили в авторитетных неинформированных сферах и в заслуживающих доверия некомпетентных кругах, подсчет был проведен в «Рогах и копытах» по приватной просьбе самого Евг. Сазонова.

Спешим предупредить как самого душелюба, так и всех вместе с ним заинтересовавшихся посетителей клуба: вас обсчитали! Обещаемая сумма явно, хотя и не слишком сильно, завышена. Причина тому, по нашему постороннему мнению, довольно проста: в «Рогах и копытах» врут календари. Не все, конечно, но, например, на 2100, 2200, 2300, 2500 и др. годы, ошибочно показывая эти годы как високосные.

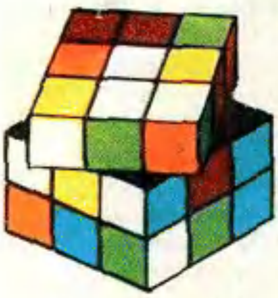
Жаль, что Евг. Сазонов сразу не обратился со своими финансовыми задумками к читателям нашего журнала — он мог бы получить ответ с семью верными знаками и со знаком качества. Но и сейчас еще не все потеряно. Задачник «Кванта», бесспорно, украсит оригинальная задача, автором которой по справедливости следует считать людоведа и душелюба:

Выясните, на сколько меня обсчитали в «Рогах и копытах».

Конечно, предполагается, что существующий календарь продержится в его сегодняшнем виде ближайшие 1 000 000 лет, начиная с 1 январи 1981 года н. э.

Редакция «Кванта» решила воспользоваться случаем, чтобы рассказать о Евг. Сазонове чуть подробнее. Возможно, наши читатели с ним не знакомы. Не знакома с ним и редакция. Но знатоки знают, что это вполне современный, а вовсе не выдуманный писатель. Его действительно мало кто видел, поскольку он, неусыпно заботясь о покое (все же конечного) множества горячих почитателей своего бесконечнограниого таланта, встречается исключительно с администрацией «Клуба 12 стульев». Евг. Сазонов написал «Бурный поток», который вся грамотная общественность одногласно (голосом самого автора) обозвала «романом века» (неясно только, к сожалению, которого, ибо шедевр полностью не опубликован и частично — тоже). Помимо этого широчайшего полотна, его пером созданы и многочисленные маломерные куски.

(Окончание см. на с. 45)



М. Евграфов

Механика волшебного кубика

В ответ на многочисленные просьбы читателей мы публикуем статью об устройстве «венгерского шарнирного кубика» («Квант», 1980, № 12). В статье подробно рассказывается, как «венгерский кубик» можно изготовить в школьной мастерской. К математической стороне дела мы вернемся в одном из следующих номеров, когда изготовленный вами кубик будет у вас в руках.

Внешне «волшебный кубик» венгерского архитектора Э. Рубика представляет из себя куб, как бы разрезанный на 27 равных маленьких кубиков (видны, конечно, только 26 из них). Маленькие кубики сцеплены таким образом, что любой слой из 9 кубиков, примыкающих к одной грани большого куба, можно свободно вращать вокруг его оси (см. рисунок выше). Поразительно, что вся система в целом при этом не распадается, ни один из маленьких кубиков пошевелить отдельно не удастся. Внешние грани маленьких кубиков снабжены наклейками шести разных цветов (по девять наклеек каждого цвета); требуется с помощью поворотов слоев переставить маленькие кубики так, чтобы каждая грань большого куба оказалась окрашенной в один цвет.

О том, как это сделать, напечатано немало статей (например, «Квант», 1980, № 12 и «Наука и жизнь», 1981, № 3). Устройство «венгерского кубика» в этих статьях подробно не обсуждалось, что вполне естественно. Имея кубик, его нетрудно разобрать и увидеть, как он устроен. Моя статья написана для тех, кто не имеет возможности решить задачу столь простым путем. Я сам был именно в таком положении, но мне повезло: я выпросил у одного из своих знакомых сломанный «венгерский кубик», починил его и вернул хозяину. С полученными знаниями мне уже нетрудно было сделать свой кубик.

Как же он крутится?

«Венгерский кубик» составлен из 27 основных деталей (не считая цветных наклеек, пружинок и других мелочей). Эти детали — трехмерный крест, скрытый внутри, и 26 «кубиков», выходящих наружу.

«Кубики» — отнюдь не кубики. Они бывают трех различных видов в зависимости от расположения на гранях большого куба: *центральные кубики* (их 6 штук, расположены они в центре каждой грани), *средние кубики* (их 12 штук, расположены они в середине каждого ребра) и *угловые кубики* (их 8 штук, они расположены в вершинах большого куба).

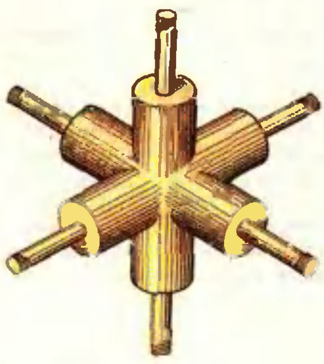


Рис. 1. Крест.

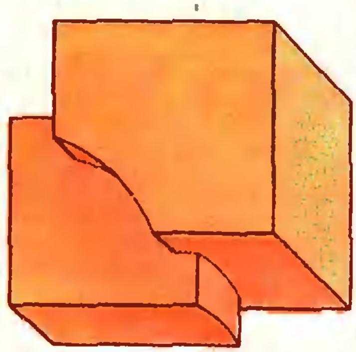


Рис. 2. Боковой кубик.

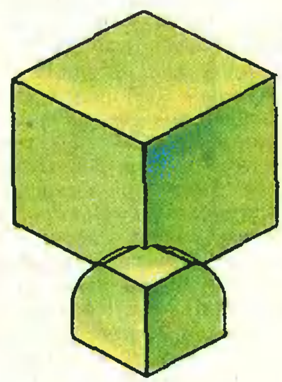


Рис. 3. Угловой кубик.

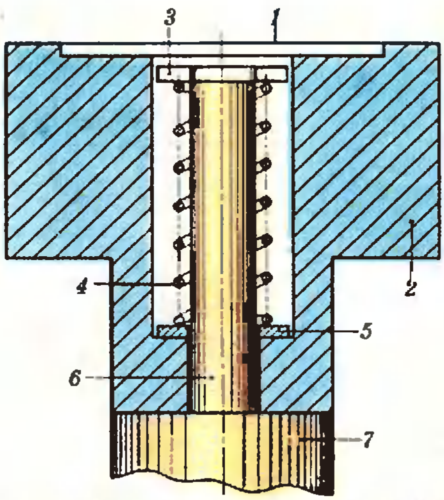


Рис. 4. Центральный кубик на кресте (1 — крышечка; 2 — центральный кубик; 3 — гайка; 4 — пружинка; 5 — шайба; 6 — тонкая ось креста; 7 — толстое плечо креста).

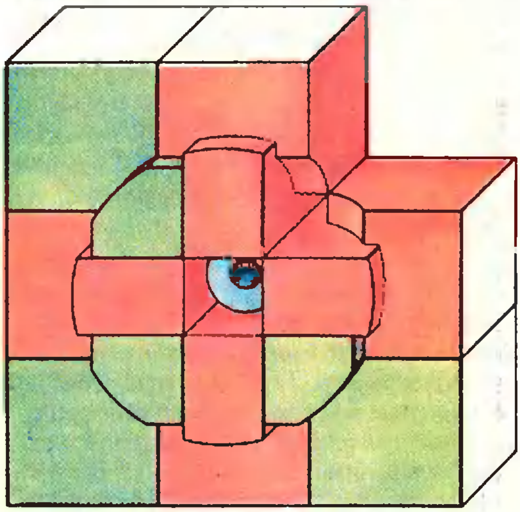


Рис. 5. Внутренняя сторона грани куба, снятой **с креста (один угловой кубик также снят).**

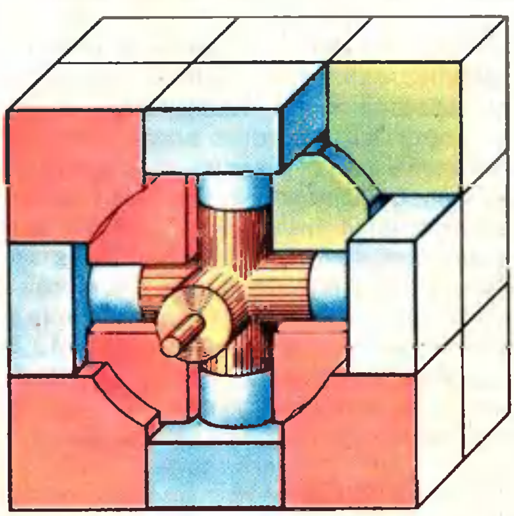


Рис. 6. Вид куба, с которого сняты одна грань и один средний кубик.

На рисунках 1, 2 и 3 изображены соответственно внутренний крест, средний кубик и угловой кубик. На рисунке 4 изображено крепление центрального кубика на внутреннем кресте.

Рисунок 5 изображает внутреннюю сторону грани, снятой с креста.

Рисунок 6 изображает «волшебный кубик», с которого сняты одна грань и один из средних кубиков.

Для большей наглядности на рисунках 5 и 6 центральные кубики, средние кубики, угловые кубики и внутренний крест окрашены в разные цвета. Эта окраска не имеет отношения к цветным наклейкам на внешних гранях кубиков.

На рисунках 5 и 6 видно, как выступы на средних и угловых кубиках складываются в почти цилиндрический выступ с внутренней стороны грани большого куба, а на среднем слое образуется цилиндрическое кольцеобразное углубление. Поворот слоя (грани) отвечает повороту цилиндрического выступа в цилиндрическом углублении.

Вот в сущности и весь секрет устройства головоломки Э. Рубика!

Роль пружинки 4 (см. рис. 4) — в том, чтобы иметь возможность слегка оттягивать при поворотах поворачиваемый слой.

Из рисунка 4 видно, в частности, как разбирать «волшебный кубик». Для этого нужно снять цветную наклейку с какого-либо одного центрального кубика, вытащить крышечку 1, подцепив ее за край иголкой или ножом, и освободить пружинку 4. После этого центральный кубик снимется с оси креста, и головоломка легко разберется.

* * *

Перейдем ко второй теме статьи — как смастерить самодельный «волшебный кубик». Речь пойдет не о каком-либо неполноценном подражании промышленному экземпляру. Самодельная головоломка должна быть и красивее, и надежнее промышленной. Как говорит одна мудрая пословица, если дело стоит делать хоть как-нибудь, то его стоит делать как следует.

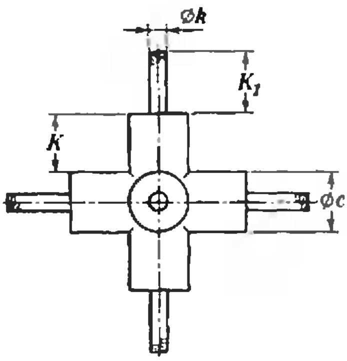


Рис. 7.

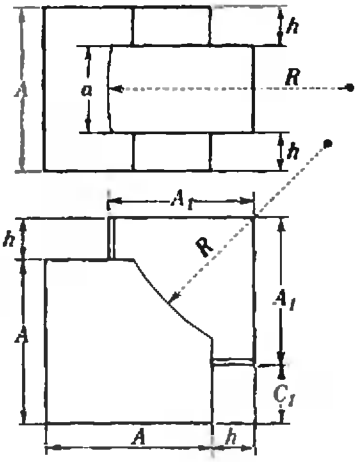


Рис. 8.

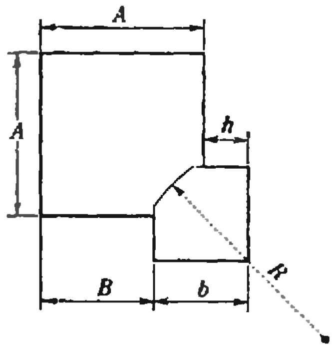


Рис. 9.

Выбор материала

Для изготовления кубика наиболее подходят сравнительно мягкие сорта пластмасс. Почти идеален фторопласт, хорош винипласт, неплохи полиэтилен и полипропилен. К сожалению, я не могу предложить регулярных способов отыскания достаточно толстых кусков таких пластмасс.

Наиболее доступны сравнительно тонкие листы более твердых (и более хрупких) пластмасс — плексиглас и гетинакс. Они тоже могут быть использованы для изготовления кубика, но придется прибегать к склеиванию. И плексиглас, и гетинакс склеиваются соответствующими клеями намертво, правда, клеи для плексигласа обладают очень сильным запахом (и даже немного ядовиты). Гетинакс прекрасно склеивается эпоксидным клеем. Кроме того, гетинакс прочно окрашивается масляными красками и нитрокрасками.

Выбор размеров

На рисунках 7, 8, 9 и 10 приведены чертежи основных деталей головоломки. Размеры обозначены буквами; одинаковые буквы означают один и тот же размер. Между размерами должны выполняться соотношения $a+2h=A$, $B+b=A+h$, $A_1=K+C_2$, $R=A_1+\frac{1}{2}c$, $2C_1+2C_2+2K+c=3A$.

В остальном размеры можно менять в зависимости от имеющегося материала. При использовании мягких пластмасс размер h не следует брать слишком малым, а при использовании хрупких пластмасс не следует брать слишком малым размер $A-B$. В первом случае нарушение условия может привести к частому рассыпанию головоломки, а во втором случае могут сломаться угловые кубики.

Для промышленного «венгерского кубика»

$A=19$ мм, $h=5$ мм, $c=9$ мм,

а у сделанного мною кубика

$A=15$ мм, $h=4$ мм, $c=7$ мм

Необходимый инструмент

Из измерительных инструментов необходимы простейший штангенциркуль и слесарный угольник (чертежные угольники не годятся). Нужны также тиски, ножовка по металлу, свежие бархатные напильники (плоский, квадратный, треугольный, полукруглый) и надфили. В качестве ножей очень удобно использовать медицинские скальпели — они делаются из хорошей стали. Если их не удастся достать, то лучше всего сделать самодельные штихели — ножички с различной формой лезвий. Их затачивают на точиле из обломков ножовочных полотен. Еще понадобятся сверла различных диаметров, а также метчик и плашка (для нарезания внутренней и наружной резьбы) М2,5 или М3. Желательно иметь под рукой набор наждачной бумаги с разной величиной зерна (не очень крупного).

Изготовление креста

Толстая часть креста может быть изготовлена (как и в промышленном

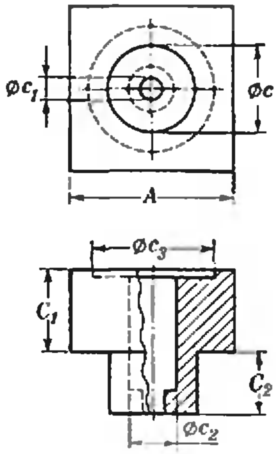


Рис. 10.

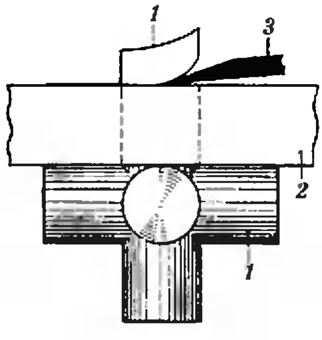


Рис. 11. 1 — крест; 2 — металлическая или плексигласовая планка с отверстием; 3 — нож.

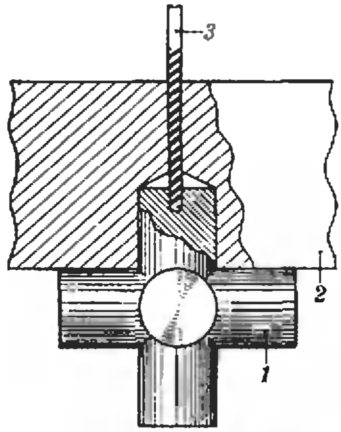


Рис. 12. 1 — крест; 2 — кондуктор — планка с просверленным в ней заранее ступенчатым отверстием; 3 — сверло.

«венгерском кубике») из куска капрона. Кусок капрона нужной величины можно получить, расплавив старые чулки, обрывки рыболовной лески и т. п. при температуре 120° в алюминиевой или жестяной баночке. Капрон легко режется ножом, и грубую заготовку креста сделать легко. Для придания каждому плечу креста точной цилиндрической формы удобно следующее приспособление: в металлической пластине сверлятся 4—5 отверстий; самое узкое — желаемого диаметра, каждое следующее на 0,2—0,3 мм шире. Когда мы продавливаем капроновое плечо креста через отверстие, острый край отверстия срезает с капрона стружку. После продавливания через все отверстия по очереди мы получим плечо почти идеальной цилиндрической формы. При обработке каждого следующего плеча нужно следить, чтобы оно получилось строго перпендикулярным к тем уже обработанным плечам, к которым оно должно быть перпендикулярно, и соосно с противоположным плечом. Перпендикулярность проверяется угольником на просвет. Нарушения подправляются ножом. Соосность проверяется на глаз и подправляется ножом.

Тонкие оси креста лучше всего делать из стальных вязальных спиц диаметра 2,5 мм, нарезанных на кусочки нужной длины. Толстые плечи креста подрезаются по размеру (рис. 11), а затем в них высверливаются осевые отверстия диаметра 2 мм (рис. 12). Концы тонких осей (~7 мм) грубо зазубриваются напильником. Эти концы нагревают и вдавливают в высверленные отверстия. Чтобы не испортить крест, эту операцию лучше проводить, вставив оперируемое плечо в отверстие, которое использовалось для подрезания по размеру. На оставшемся конце тонкой оси нарезается резьба. Поскольку начало резьбы всегда бывает не очень точным, лучше сделать тонкую ось немного длиннее. Когда на резьбу будет навернута гайка, лишний кусочек спиливается напильником.

Для завинчивания гайки на ней нужно сделать прорезь (рис. 13; на том же рисунке изображен конец отвертки для завинчивания такой гайки).

Окончательная подгонка креста проводится при сборке головоломки, так что крест не следует сразу доводить до совершенства.

На токарном станке можно сделать очень хороший крест из металла (материал — твердый дюралюминий или латунь). Однако эта работа требует сравнительно высокого уровня токарного мастерства. Обработку де-

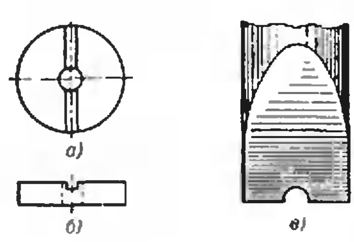


Рис. 13. *а*, *б* — гайка; *в* — отвертка.

тали (толстая часть креста) следует вести в центрах, причем для разных стадий обработки придется изготовить 2 или 3 различных хомутика (приспособления для вращения детали). С разметкой центровых отверстий для второй и третьей пары плеч креста тоже придется потрудиться. Не так просто снять и острые выступы в середине готового креста. Тонкая ось в этом случае сажается в толстую часть креста на резьбе, а затем запаивается (или приклеивается эпоксидным клеем, если крест сделан из дюралюминия).

Изготовление средних и угловых кубиков

После того как заготовки для кубиков грубо нарезаны (с точностью 1—1,5 мм для мягких пластмасс и 0,5—1 мм для твердых пластмасс), их обработку можно условно разделить на две стадии: грубую и точную подгонку по размерам. Грубая подгонка ведется по шаблонам на глаз, точная — по угольнику и штангенциркулю. При грубой подгонке мягкие пластмассы подрезаются ножом и выравниваются крупнозернистой шкуркой, а твердые — опиливаются бархатным напильником (шкурку и напильники следует время от времени мыть щеткой с водой). При точной подгонке любые пластмассы подскабливаются ножом и выравниваются мелкозернистой шкуркой.

Процесс точной подгонки таков:

Поверочным инструментом с небольшим нажимом проводят по обрабатываемой поверхности. От нажима выпуклые места начинают блестеть, а впадины остаются матовыми. Заблестевшие места подскребаются ножом, и процесс повторяют. Время от времени поверхность выравнивают шкуркой. В качестве поверочного инструмента при подгонке первой плоскости используют любую плоскую плитку, при подгонке перпендикулярной плоскости — угольник, а при подгонке параллельной плоскости — штангенциркуль.

Последовательность операций при изготовлении кубиков из мягких пластмасс такова:

Сначала производится точная подгонка трех взаимно перпендикулярных плоскостей болванки, затем — точная подгонка параллельных им плоскостей. Получается параллелепипед (или куб). Затем производится грубая и точная подгонка вырезов на одной грани, потом на другой и т. д. Для грубой подгонки вырезов на гранях стоит сделать держалку для заготовки, изображенную на рисунке 14, и приспособления для пропиливания (рис. 15). Материалом для обоих приспособлений может служить плексиглас. В качестве пилки удобнее всего взять запасные полотна для ножовки-шлицовки (они продаются в хозяйственных магазинах). Лучше сделать столько приспособлений для пропиливания, сколько различных (по высоте и глубине) вырезов.

Для криволинейных вырезов также стоит сделать специальный инструмент — нечто вроде полукруглой стамески. Его нетрудно изготовить на точиле из обычной стамески. Радиус закругления при заточке проверяется по шаблону.

При изготовлении кубиков из твердой пластмассы делать сложные вырезы не нужно. Еще одно упрощение — у твердых листовых пластмасс с самого начала имеются точно подогнанные параллельные плоскости. Однако эти упрощения с лихвой компенсируются трудностями, связанными со склейкой. Основная трудность — сдвиги деталей, зажатых для затвердения клея. Лучший способ преодоления этой трудности — соединение деталей винтами.

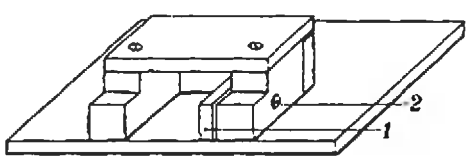


Рис. 14. 1 — съемная прокладка (такую же можно подкладывать и под крышку); 2 — зажимный винт.

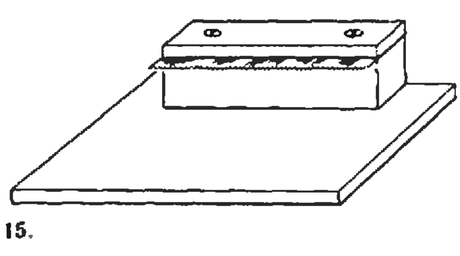


Рис. 15.

Чтобы винты не приклеились, их следует покрыть тонким слоем машинного масла или вазелина. После затвердения клея винты вывинчиваются, отверстия промываются и заделываются эпоксидным клеем, смешанным с опилками пластмассы. Вместо винтов в просверленные отверстия можно вставлять плотно сидящие гвозди. Их можно и не удалять после склеивания. Винты немного удобнее, так как с ними не нужны специальные приспособления для зажима деталей на время затвердения клея.

Центральные кубики

Если есть возможность поработать на токарном станке, то центральные кубики лучше делать составными — квадратная шляпка из пластмассы, круглая ножка из металла (предпочтительно из латуни). Чертеж шляпки и ножки дан на рисунке 16. Токарная работа не требует особой квалификации.

Цветные наклейки

В этом вопросе нельзя использовать то решение, которое выбрано в промышленном образце. Липких лент стольких цветов не найти. Для кубиков из гетинакса простейшее решение — окраска (масляными красками или нитрокрасками). Для кубиков из мягких пластмасс — инкрустация. Инкрустируемые кусочки можно нарезать из наборов лекал. Кусочки проще делать круглыми. Их легко вырубать с помощью стальной трубки с остро заточенными краями. Углубления в кубиках можно сделать с помощью перки (перовое сверло, используемое для сверления отверстий в дереве коловоротом). Профиль перки (а если необходимо, то

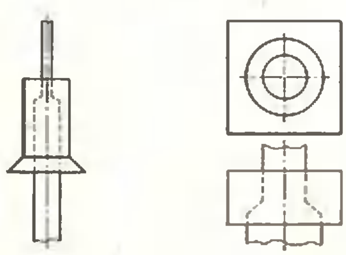


Рис. 16.

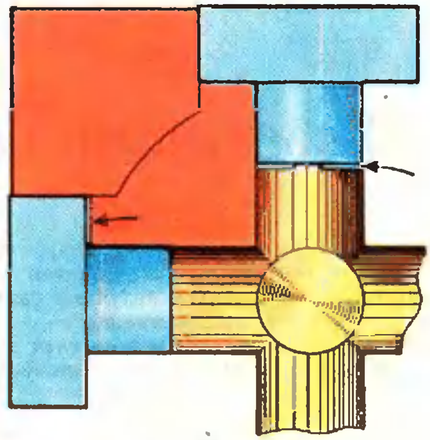


Рис. 17. Стрелки показывают на возможные зазоры.

и ее диаметр) можно немного изменить подточкой на точиле.

У центальных кубиков инкрустируемые кусочки заодно будут исполнять обязанности крышечек.

Сборка волшебного кубика

Тщательная отделка боковых и угловых кубиков необходима, так как «по роду службы» они должны хорошо сидеть в любых допустимых местах. При окончательной подгонке можно подправлять лишь крест и положение центральных кубиков на нем. Проверка положения центральных кубиков проводится с помощью боковых кубиков (рис. 17). Сначала просветы выравниваются легким подгибом тонких осей креста, а затем сводятся на нет подпиливанием конца ножки центрального кубика. Если боковой кубик плохо входит, то немного подпиливается и сам крест. На этой стадии острые углы кубиков, упирающиеся в центр креста и в соединение ножки центрального кубика с его шляпкой, стоит немного скруглить.

После ликвидации просветов проверяется движение собранной головоломки. Если «волшебный кубик» слишком часто застревает на поворотах, можно немного ослабить пружинки (укоротив их). Может помочь и небольшое скругление всех острых углов.

При окончательной сборке на каждую гайку следует капнуть каплю лака для ногтей. Это предупредит отвинчивание гайки во время работы.

Победители конкурса «Кванта»

Ежегодно наш журнал проводит конкурс среди школьников по решению задач из Задачника «Кванта». В соответствии с решением оргкомитета Всесоюзной олимпиады школьников победители этого конкурса получают право участвовать сразу в четвертом (республиканском) туре Всесоюзной олимпиады.

Ниже публикуется список победителей конкурса «Кванта» 1981 года, получивших право участвовать в республиканских олимпиадах 1982 года.

Математика

М. АЛЕКСЕЕВ — Москва, с. ш. № 2, 8 кл.
А. АСЛАНЯН — ФМШ № 1 при ЕрГУ, 9 кл.
Ю. БЕСПАЛОВ — ФМШ № 2 при КГУ, 19 кл.
И. БИНУС — Пенза, с. ш. № 20, 10 кл.
А. ГОХБЕРГ — Донецк, с. ш. № 17, 10 кл.
О. ГРИНИВ — ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
О. ДРАНКО — ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
А. ДУБИЦКАС — Таураге, с. ш. № 1, 11 кл.
М. ЕЛИСЕЕВ — ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
О. ЕРОШКИН — Днепропетровск, с. ш. № 15, 9 кл.
И. ЖУКОВ — Ленинград, с. ш. № 239, 9 кл.
П. ЗУСМАНОВИЧ — Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.
И. ИТЕНБЕРГ — ФМШ № 45 при ЛГУ, 9 кл.
Ю. КАКУЛОВ — Цалка, с. ш. № 3, 9 кл.
Д. КАМУНТАВИЧЮС — Вильнюс, с. ш. им. А. Венуолиса, 11 кл.
А. КИСЕЛЕВ — Ташкент, с. ш. № 103, 10 кл.
В. КИСИЛЬ — Одесса, с. ш. № 33, 10 кл.
Д. КОРОТКИН — ФМШ № 45 при ЛГУ, 10 кл.
А. КОРСУКОВ — ФМШ при НГУ, 10 кл.
Л. ЛЕЙЦИН — Черингов, с. ш. № 10, 9 кл.
С. МАМЕДОВ — Баку, с. ш. № 70, 10 кл.
Ю. НИКОЛАЕВСКИЙ — Харьков, с. ш. № 131, 10 кл.
А. НИКОНОВ — Кировград, с. ш. № 2, 10 кл.
М. ОВЕЦКИЙ — Донецк, с. ш. № 17, 10 кл.
Г. ПЕРЕЛЬМАН — Ленинград, с. ш. № 239, 10 кл.
А. САВКИН — ФМШ № 45 при ЛГУ, 10 кл.
В. ТИТЕНКО — д. Блужа Минской обл., 10 кл.
Г. ТРУНОВ — Москаа, с. ш. № 2, 10 кл.
Е. ТЮРИН — Вильнюс, с. ш. № 4, 9 кл.
Р. УГРИНОВСКИЙ — Хмельник, с. ш. № 3, 10 кл.
А. ХОХЛОВ — Москва, с. ш. № 36, 10 кл.
П. ЦВЕТКОВ — ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
О. ЧАЛЫХ — ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
Л. ЭПРЕМИДЗЕ — Тбилиси, ФМШ им. Комарова, 10 кл.
Ф. ЭФЕНДИЕВ — Баку, с. ш. № 134, 10 кл.
В. ЯРОШ — ФМШ № 45 при ЛГУ, 10 кл.

Физика

М. АРАМЯН — ФМШ № 1 при ЕрГУ, 9 кл.
А. АСТАХОВ — ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
А. БАБАЕВ — Баку, с. ш. № 145, 10 кл.
Э. БАГДАСАРЯН — Баку, с. ш. № 46, 8 кл.
Я. БАЗАЛИЙ — Донецк, с. ш. № 17, 10 кл.
Ю. БЕСПАЛОВ — ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
Б. ВЕЙЦМАН — Одесса, с. ш. № 53, 10 кл.
М. ЖЯКОНИС — Каунас, с. ш. № 2, 11 кл.
Г. КОСТЫШИН — Минск, с. ш. № 16, 10 кл.
А. КУБЫШКИН — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
Б. МУРЗАХМЕТОВ — Джезказган, с. ш. № 22, 10 кл.
В. ПЕНТЕГОВ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
А. ПИРОЖЕНКО — ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
А. РАДИОНОВ — пос. Никольское Ленинградской обл., 10 кл.
М. РАХМАНОВ — Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.
Ю. СИНЮКОВ — ст. Селезни Тамбовской обл., 10 кл.
М. СТЕЖКО — Брест, с. ш. № 1, 10 кл.
С. СТРЕЛЕЦКИЙ — Львов, с. ш. № 50, 10 кл.
Ю. ТАЛДЕНКО — Сумы, с. ш. № 10, 10 кл.
А. ТЕРЕЩЕНКО — ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
А. ТИЩЕНКО — Днепропетровск, с. ш. № 23, 10 кл.
А. ХОДАРИН — п. Нововоронежский, с. ш. № 1, 10 кл.

задачник Кванта

Задачи

М731—М735; Ф743—Ф747

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 мая 1982 года по адресу: 117071, Москва, Ленинский проспект, 15, «Физматлит», «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 3-82» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М731, М732» или «Ф743». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

М731. Двое играют в такую игру: первый называет натуральное число от 2 до 9; второй умножает это число на произвольное натуральное число от 2 до 9; затем первый умножает результат на любое натуральное число от 2 до 9 и т. д.; выигрывает тот, у кого впервые получится произведение больше а) тысячи, б) миллиона. Кто выигрывает при правильной игре — начинающий или его партнер?

В. Болтянский

М732. а) В треугольник ABC вписаны два разных прямоугольника так, что на основании AC лежат по две вершины каждого прямоугольника (а на сторонах AB и BC — по одной). Периметр каждого из прямоугольников равен 10. Найдите площадь треугольника ABC и докажите, что периметр любого вписанного в треугольник ABC прямоугольника, две вершины которого лежат на $[AC]$, тоже равен 10.

б)* В четырехугольник $ABCD$ вписаны два прямоугольника с параллельными сторонами (так, что на каждой из сторон AB, BC, CD, DA лежит по одной вершине каждого прямоугольника). Периметр каждого из прямоугольников равен 10. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$ и докажите, что для любой точки на любой из сторон четырехугольника $ABCD$ можно построить вписанный прямоугольник с вершиной в этой точке, стороны которого параллельны сторонам данных прямоугольников и периметр которого также равен 10

Малхази Беруашвили
(ученик 10 класса ФМШ им. Комарова г. Тбилиси)

М733. а) При каких натуральных m число 31^m-1 делится на 2^m? б)* Докажите, что для любого нечетного a и натурального m существует бесконечно много натуральных k таких, что a^k-1 делится на 2^m. в)* Докажите, что для любого нечетного a существует лишь конечное число натуральных m таких, что a^m-1 делится на 2^m.

В. Прасолов

М734. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную вокруг него окружность в точке K. Докажите, что длина проекции отрезка AK на прямую AB (или AC) равна полусумме длин сторон AB и AC.

Р. Мазов

М735. а) Докажите, что круг диаметра 1 нельзя покрыть несколькими бумажными полосками, суммарная ширина которых меньше 1 (рис. 1).

б) Назовем *слоем толщины* h часть пространства, заключенного между параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии h друг от друга. Докажите, что шар диаметра 1 нельзя покрыть несколькими слоями, суммарная толщина которых меньше 1.

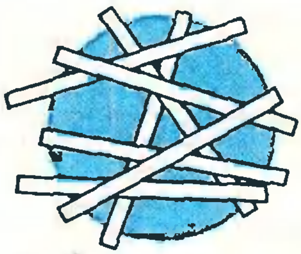


Рис. 1.

Ф743. С какой минимальной скоростью можно перебросить камень через стену высотой H и толщиной l, если бросать его с высоты h?

О. Савченко

Ф744. Космический аппарат представляет собой жесткую тонкостенную сферу радиуса $R=2$ м, наполненную газом. Внутри аппарата находится шар радиуса $r=R/2$, наполненный тем же газом, что и весь аппарат, но при большем давлении. Шар касается внутренней поверхности аппарата. В результате повреждения шар лопнул. Найти, во сколько раз изменилось давление внутри аппарата, если оказалось, что весь аппарат при этом сместился на расстояние $a=0{,}5$ м. Массой оболочек пренебречь; температуру считать неизменной.

А. Буздин

Ф745. Теплоизолированный сосуд разделен на две части теплоизолированным поршнем, который может перемещаться в сосуде без трения. В левой части сосуда содержится 1 моль идеального одноатомного газа, в правой — вакуум. Поршень соединен с правой стенкой сосуда пружиной (рис. 2), длина которой в свободном состоянии равна длине сосуда. Пренебрегая теплоемкостью сосуда, поршня и пружины, определить теплоемкость системы.

Б. Клячин

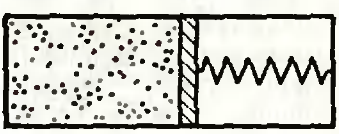


Рис. 2.

Ф746. Электрическая батарея, использующая β-радиоактивность, представляет собой металлическую сферу, внутри которой помещен изолированный от нее кусочек радиоактивного вещества (рис. 3). Ежесекундно распадаются ν атомов. Считая, что энергия электронов, образующихся при распаде, равновероятно распределена от минимального значения W_{min} до максимального W_{max}, определить ЭДС батареи. Какой наибольший ток может давать такая батарея? До каких сопротивлений нагрузки батарею можно считать генератором тока?

И. Воробьев

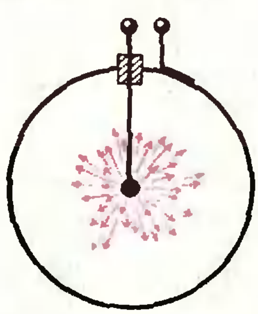


Рис. 3.

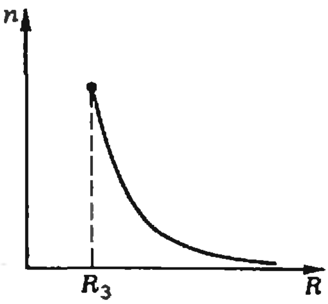


Рис. 4. R_3 — радиус Земли.

Ф747. Космонавты во время вывода космического корабля на орбиту заметили на некоторой высоте H_0 тонкий светящийся слой (полное внутреннее отражение света в атмосфере). Как по графику (рис. 4) зависимости коэффициента преломления атмосферы n от расстояния R до центра Земли определить H_0?

О. Батищев

Problems

M731—M735; Ф743—Ф747

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications.

The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than May 31st to the following address: USSR, Moscow, 117071, МОСКВА, ЛЕНИНСКИЙ ПРОСПЕКТ, 15, «Физматлит», «КВАНТ». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions of problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. The list of prizewinners is published in the September issue. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us in two copies (including the solution) in an envelope inscribed 'NEW PROBLEM IN PHYSICS (MATHEMATICS)'.

M731. Two players play the following game: the first calls out any natural number from 2 to 9; the second multiplies this number by any natural number from 2 to 9; then the first multiplies the result by any natural number from 2 to 9 etc.; the winner is the player who first obtains a product greater than *a*) one thousand, *б*) one million. Who wins, the first or second player, if both play without mistake?

V. Boltianski

M732. *a*) Two different rectangles are inscribed in the triangle *ABC* so that two vertices of each rectangle are on the side *AC* and one of each on sides *AB* and *BC*. The perimeter of each triangle is 10. Find the area of triangle *ABC* and prove that the perimeter of any rectangle inscribed (as explained above) in triangle *ABC* also equals 10.
б) Two rectangles with parallel sides are inscribed in the quadrilateral *ABCD* so that one vertex of each of the rectangles lies on each of the sides *AB*, *BC*, *CD*, *DA* of the quadrilateral. The perimeter of each of the rectangles is 10. Find the area of the quadrilateral *ABCD* and prove that for any point on any of the sides of the quadrilateral *ABCD* there is a rectangle with vertex at this point, sides parallel to those of the given rectangles and perimeter 10.

Malhasi Beruashvili (10th grade)

M733. *a*) For what positive integers m is the number $31^m - 1$ divisible by 2^m? *б*)* Prove that for any odd a and any positive integer m there exists an infinite set of positive integers k such that $a^k - 1$ is divisible by 2^m. *c*)* Prove that for any odd a there exists only a finite set of positive integers m such that $a^m - 1$ is divisible by 2^m.

V. Prasolov

M734. The bissector of angle *A* of triangle *ABC* intersects the circumscribed circle at the point *K*. Prove that the length of the projection of the segment *AK* on the line *AB* (or *AC*) is the mean of the lengths of *AB* and *AC*.

R. Mazov

M735*. *a*) Prove that a disc of diameter 1 cannot be covered by several paper strips whose total width is less than 1 (figure Рис. 1).
b) By a layer of thickness *h* we mean the part of space bounded by two parallel planes whose distance is *h*. Prove that a ball of diameter 1 cannot be covered by several layers whose total thickness is less than 1.

P743. With what minimal velocity must a stone be thrown from height h in order to clear a wall of height H and thickness l?

O. Savchenko

P744. An apparatus in cosmic space consists of a rigid thin sphere of radius $R=2$ m, filled with gas, and also containing a sphere of radius $r=R/2$ filled with the same gas, but at higher pressure. The inner sphere is tangent to the inner surface of the apparatus. As the result of an accident, the inner sphere explodes. Find how the pressure inside the apparatus changes if the explosion displaces the apparatus by $a=0{,}5$ m. The mass of the shells of the spheres is negligible, the temperature assumed constant.

A. Buzdin

P745. A thermoisolated receptacle is divided into two compartments by a thermoisolated piston which moves without friction. The left compartment contains 1 mole of an ideal monoatomic gas, the other is vacuum. The piston is connected to the right wall of the receptacle by a spring (see figure Рис. 2, p. 28), whose length in unstressed state is equal to the length of the receptacle. Neglecting the heat capacity of the receptacle, piston and spring, determine the heat capacity of the system.

W. Kliachin

P746. An electric battery, working on β-radioactivity, is a metallic sphere, inside which a piece of a radioactive substance, isolated from the sphere, is placed (figure Рис. 3, p. 28). Every second ν atoms are decomposed. Assuming that the energy of the electrons appearing in the process of radioactive decomposition is uniformly distributed in the range between the minimal and maximal values W_{min} and W_{max}, find the electromotive force of the battery. What maximal current can such a battery yield? Up to what values of the load's resistance can this battery be considered a generator of current?

I. Vorobiev

P747. While their spaceship was rising to orbit, cosmonauts noticed a thin luminous layer (complete inner reflexion of light in atmosphere) at elevation H_0 above the earth surface. Using the graph (figure Рис. 4, p. 29) showing the dependence of the refraction coefficient n on the distance R from the centre of the earth, how can one determine H_0?

O. Batischev

Решения задач

М691—М695; Ф703—Ф707

М691. *Будем говорить, что число обладает свойством (K), если оно разлагается в произведение K последовательных натуральных чисел, больших 1. а) Найдите K такое, для которого некоторое число N обладает одновременно свойствами (K) и (K+2). б) Докажите, что чисел, обладающих одновременно свойствами (2) и (4), не существует.*

а) Число $2\cdot3\cdot4=24$ обладает свойствами (1) и (3). Приписав к обеим частям равенства $2\cdot3\cdot4=24$ все натуральные числа от 5 до 23, получим число

$$2\cdot3\cdot4\cdot\underbrace{5\cdot6\cdot\ldots\cdot23}=\underbrace{5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot\ldots\cdot23}\cdot24,$$

обладающее свойствами (20) и (22). Разумеется, примеров такого типа — бесконечное множество: если $b=a(a+1)(a+2)$, то число

$$a(a+1)(a+2)\underbrace{(a+3)\cdot\ldots\cdot(b-1)}=\underbrace{(a+3)\cdot\ldots\cdot(b-1)}b$$

обладает свойствами $(b-a-2)$ и $(b-a)$.

Существуют примеры и другого рода: например, число

$$2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=8\cdot9\cdot10$$

обладает свойствами (3) и (5). Приписав сюда «пропущенную» семерку, мы получим число, обладающее свойствами (4) и (6):

$$2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot\underline{7}=\underline{7}\cdot8\cdot9\cdot10.$$

И вообще, если у нас имеется число, обладающее свойствами (K) и $(K+2)$:

$$(m+1)\cdot\ldots\cdot(m+K)=(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+K+2),$$

причем $n>m+K$, то число

$$(m+1)\cdot\ldots\cdot(m+K)\underline{(m+K+1)\cdot\ldots\cdot n}=$$
$$=\underline{(m+K+1)\cdot\ldots\cdot n}\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot(n+K+2)$$

обладает свойствами $n-m$ и $n-m+2$.

Можно также, наоборот, вычеркивать последовательные натуральные числа, входящие в обе части соответствующего равенства.

б) Предположим, что для некоторых m и n

$$m(m+1)=n(n+1)(n+2)(n+3);$$

тогда

$$m^2+m+1=(n^2+3n+1)^2,$$

что невозможно, поскольку

$$m^2<m^2+m+1<(m+1)^2.$$

И. Клумова

◆

М692. *Точки C_1, A_1, B_1 взяты соответственно на сторонах AB, BC, CA треугольника ABC так, что*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|}=\frac{|BA_1|}{|A_1C|}=\frac{|CB_1|}{|B_1A|}=\frac{1}{3}.$$

Докажите, что периметр P треугольника ABC и периметр P_1 треугольника $A_1B_1C_1$ связаны неравенствами

а) $P_1<\frac{3}{4}P$; *б)* $P_1>\frac{1}{2}P$.

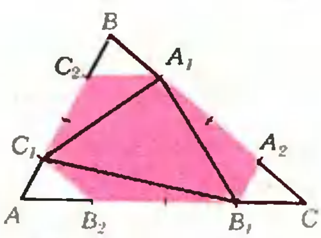


Рис. 1.

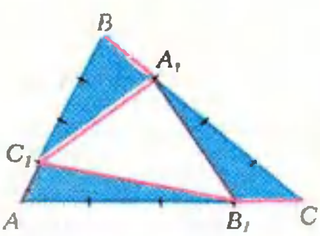


Рис. 2.

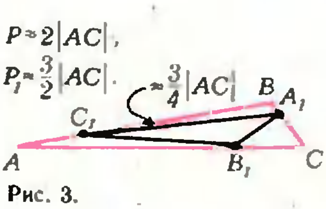


Рис. 3.

а) Рассмотрим точки C_2, A_2, B_2, лежащие соответственно на сторонах AB, BC, CA треугольника ABC, такие, что (см. рис. 1)

$$\frac{|AC_2|}{|C_2B|}=\frac{|BA_2|}{|A_2C|}=\frac{|CB_2|}{|B_2A|}=3.$$

В силу неравенств треугольника периметр P_1 треугольника $A_1B_1C_1$ меньше периметра шестиугольника $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$. Поскольку сумма длин противоположных (параллельных) сторон этого шестиугольника равна $\frac{3}{4}$ длины соответствующей стороны треугольника ABC, периметр шестиугольника $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ равен $\frac{3}{4}P$. Поэтому $P_1<\frac{3}{4}P$.

б) В силу неравенств треугольника (см. рисунок 2)

$$|B_1C_1|+|C_1A|>|B_1A|,$$
$$|C_1A_1|+|A_1B|>|C_1B|,$$
$$|A_1B_1|+|B_1C|>|A_1C|.$$

Складывая эти неравенства, получаем $P_1+\frac{1}{4}P>\frac{3}{4}P$, то есть $P_1>\frac{1}{2}P$

Оценку $P_1>\frac{1}{2}P$ можно улучшить. Для этого заметим, что $\frac{7}{4}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{C_1A_1}+2\overrightarrow{C_1B_1}$ (аналогично $\frac{7}{4}\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{A_1B_1}+2\overrightarrow{A_1C_1}$, $\frac{7}{4}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{B_1C_1}+2\overrightarrow{B_1A_1}$ — проверьте это!). Из этих векторных равенств следуют неравенства для длин векторов:

$$\frac{7}{4}|AC|<|A_1C_1|+2|B_1C_1|,$$
$$\frac{7}{4}|AB|<|A_1B_1|+2|A_1C_1|,$$
$$\frac{7}{4}|BC|<|B_1C_1|+2|B_1A_1|;$$

складывая их, мы получаем $\frac{7}{4}P<3P_1$, или $P_1>\frac{7}{12}P$.

Неравенства $\frac{3}{4}P>P_1$ и $P_1>\frac{7}{12}P$ не улучшаемы.

В самом деле, если взять треугольник ABC, у которого вершина B близка к C (рис. 3), то $P\approx2|AC|$, а $P_1\approx\frac{3}{2}|AC|$, так что отношение периметров $P_1:P$ будет приблизительно равным $\frac{3}{4}$.

$P \approx 2|AC|$,

$P_1 \approx 2|C_1'B_1| = 2(|AB_1| - |AC_1'|)$.

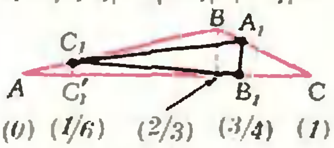


Рис. 4.

Если же взять треугольник ABC таким, чтобы его вершина B была близка к $\frac{2}{3}$ отрезка AC (рис. 4), то по-прежнему $P \approx 2|AC|$, но $P_1 \approx 2|C_1'B_1| = 2\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right)|AC| = \frac{7}{12} \cdot 2|AC|$, и отношение $P_1 : P \approx \frac{7}{12}$.

В. Турчанинов

М693. *В некотором поселке 1000 жителей. Ежедневно каждый из них делится узнанными вчера новостями со всеми своими знакомыми. Известно, что любая новость становится известной всем жителям поселка. Докажите, что можно выбрать 90 жителей так, что если одновременно всем им сообщить какую-то новость, то через 10 дней она станет известной всем жителям поселка.*

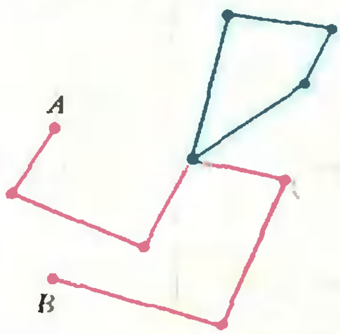


Рис. 1.

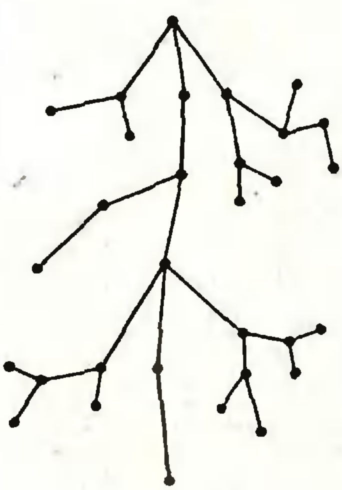


Рис. 2.

◆

Сопоставим каждому жителю поселка некоторую точку на плоскости. Те точки, которые соответствуют знакомым между собой жителям, соединим отрезком. Получающаяся картинка называется *графом*. Выделенные точки называются *вершинами* графа, а связывающие их отрезки — *ребрами*.

Та часть условия задачи, в которой требуется, чтобы новость, сообщенная одному жителю поселка, в конце концов становилась известной всем его жителям, соответствует тому, что по ребрам нашего графа можно пройти от любой его вершины до любой другой. Такой граф называют *связным*. Последовательность ребер графа, связывающую две его вершины, в которой нет повторяющихся ребер, называют *цепью*. Если цепь начинается и кончается в одной и той же вершине, ее называют *циклом*. На рисунке 1 показана цепь, соединяющая вершины A и B, а также цикл. Связный граф, не содержащий циклов, называют *деревом*. Он действительно похож на дерево (рис. 2).

Назовем *расстоянием* между двумя вершинами графа количество ребер в самой короткой цепи, соединяющей эти вершины. Заметим, что если граф является деревом, то любую пару его вершин соединяет лишь одна цепь.)

Введенные понятия позволяют упростить запись решения задачи. В новых терминах формулировка может быть переписана так:

Доказать, что в связном графе с 1000 вершинами можно указать такое множество из 90 вершин, что для любой вершины графа найдется вершина из этого множества, расстояние до которой не больше 10.

Пусть X и Y — две вершины нашего графа, находящиеся на наибольшем расстоянии. Если это расстояние не больше 10, то расстояние от любой вершины нашего графа до любой другой не больше 10 — в этом случае 90 вершин можно выбрать произвольно.

Заметим, что достаточно решить нашу задачу лишь для случая, когда граф является деревом. Действительно, пусть наш граф — не дерево; тогда он содержит хотя бы один цикл. Если выбросить из графа какое-нибудь ребро, принадлежащее этому циклу, цикл исчезнет, а граф останется связным. Поскольку в графе — лишь конечное количество циклов, применив несколько раз эту операцию, мы превратим наш граф в дерево. Множество из 90 вершин полученного дерева, удовлетворяющее условию задачи, очевидно, будет годиться и для первоначального графа, так как прибавление новых ребер не увеличивает расстояния между вершинами.

Итак, пусть у нас имеется дерево с 1000 вершинами, X и Y — две вершины, находящиеся на максимальном расстоянии, которое больше 10. Рассмотрим цепь, соединяющую вершины X и Y: $X—A_1—A_2—A_3—...—A_{10}—A_{11}—...—Y$. Возьмем точку A_{10} в качестве первой точки K_1 искомого множества. Если мы сотрем ребро между вершинами A_{10} и A_{11}, наше дерево разобьется на два дерева. Отметим, что часть, содержащая вершину X, содержит не менее 11 вершин.

Заметим, что расстояние от вершины A_{10} до каждой из вершин содержащей ее части не более 10 (если расстояние до некоторой вершины M будет больше 10, то расстояние от M до Y будет больше расстояния от X до Y, что противоречит тому, что вершины X и Y находятся на максимальном расстоянии).

Рассмотрим теперь ту часть графа, которая содержит вершину Y. Это — дерево, содержащее не более $1000-11=989$ вершин. Повторим с ним ту же самую операцию. В результате

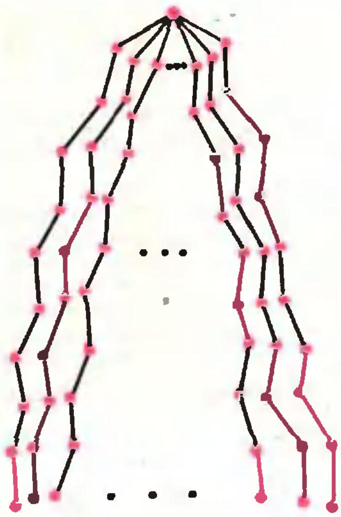


Рис. 3.

получим еще одну группу из не менее 11 вершин и среди них — точку K_2 искомого множества, а также дерево, содержащее не больше $1000-2\cdot 11=978$ вершин. После того как мы проделаем эту операцию 89 раз, мы получим 89 групп вершин, расстояние которых до каждой вершины своей группы не превосходит 10. Останется дерево, содержащее не более $1000-89\cdot 11=21$ вершины. Вновь рассмотрим в нем две вершины, находящиеся на максимальном расстоянии, и вновь возьмем в цепи, соединяющей эти вершины, десятую вершину. Очевидно, что эта вершина годится в качестве точки K_{90} искомого множества. Задача решена.

То, что в связном графе с 1000 вершинами нельзя выделить нужного множества, состоящего менее чем из 90 вершин, следует из того, что этого нельзя сделать уже для дерева с 991 вершиной, устроенного так: из одной его вершины исходят 90 лучей, на каждом из которых находится по 11 вершин (см. рис. 3).

А. Савин

М694. *В каждой вершине куба записано число. За один шаг к двум числам, размещенным на одном (любом) ребре, прибавляется по единице. Можно ли за несколько таких шагов сделать все восемь чисел равными между собой, если вначале были поставлены числа, как на рисунке 1? Как на рисунке 2? Как на рисунке 3?*

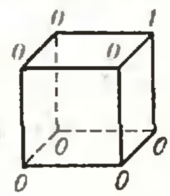


Рис. 1.

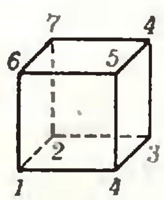


Рис. 2.

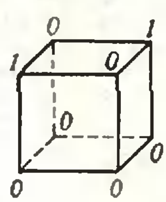


Рис. 3.

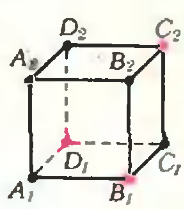


Рис. 4.

Раскрасим вершины куба в синий и красный цвет таким образом, чтобы концы каждого ребра оказались окрашенными в разные цвета (рис. 4). При добавлении единицы к числам, размещенным на одном ребре, суммы чисел в синих и красных вершинах увеличиваются на 1, так что разность этих двух сумм не изменяется. Так как в кубах на рисунках 1 и 3 эта разность не равна нулю, от них нельзя прийти к кубу с равными числами в вершинах. Покажем теперь, что если в вершинах исходного куба записаны целые числа и суммы чисел в красных и синих вершинах равны, то все восемь чисел можно сделать равными между собой.

Обозначим через d разность между наибольшим и наименьшим из чисел, записанных в вершинах куба, а через n — количество чисел, равных наименьшему. (Для куба на рисунке 1 $d=1$, $n=7$, на рисунке 2 — $d=6$, $n=1$, на рисунке 3 — $d=1$, $n=6$.) Пусть наименьшее (или одно из наименьших) число, расположено в вершине A_1 (см. рис. 4). Если какое-нибудь из соседних чисел, скажем число, записанное в вершине B_1, не является наибольшим в рассматриваемом кубе, то, прибавляя по единице к числам, размещенным на ребре A_1B_1, мы уменьшим либо d, либо n (либо и d, и n). Продолжая подобным образом, мы придем либо к кубу, у которого $d=0$, то есть все восемь чисел равны между собой, либо к кубу, в котором каждое число, соседнее с наименьшим, является наибольшим. Если в вершине A_1 такого куба расположено одно из наименьших чисел, равное a, то в вершинах B_1, D_1 и A_2 записано число $a+d$ (здесь d — разность между наибольшим и наименьшим числами в н о в о м кубе).

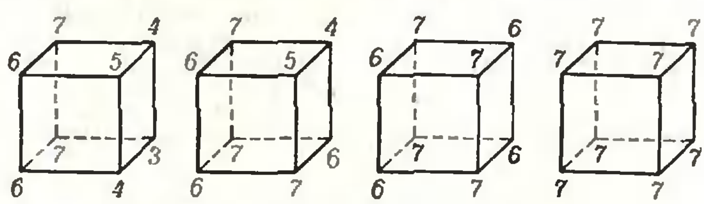


Рис. 5.

Так как сумма чисел в красных вершинах равна сумме чисел в синих вершинах, в четвертой красной вершине C_2 записано число a, а в синих вершинах C_1, B_2 и D_2 — число $a+d$. Прибавив по d единиц к концам ребра A_1B_1, затем к концам ребра C_1C_2, ребра A_1D_1, ребра C_2D_2 и, наконец, ребра A_2B_2, мы придем к кубу, все восемь чисел которого равны $a+2d$. Для куба на рисунке 2 этапы решения изображены на рисунке 5.

Ю. Ионин

М695. *Можно ли все клетки какой-нибудь прямоугольной таблицы окрасить в белый и черный цвета так, чтобы белых и черных клеток было поровну, а в каждой строке и в каждом столбце было более 3/4 клеток одного цвета?*

Предположим, что требуемая раскраска возможна. Будем называть столбец *белым* или *черным* в соответствии с тем, какой цвет в нем преобладает. Аналогичные названия будут употребляться и для строк.

Пусть m_0, m_1 — количества белых и черных строк, n_0, n_1 — количества белых и черных столбцов соответственно, $m_0+m_1=m$, $n_0+n_1=n$.

Все клетки, лежащие на пересечении белых строк с черными столбцами и черных строк с белыми столбцами, отличаются по цвету либо от содержащего их столбца, либо от содержащей их строки. Число таких клеток равно $m_0n_1+m_1n_0$. Не уменьшая общности, можно считать, что более половины этого числа клеток отличается по цвету от содержащих их строк. Опять-таки, не уменьшая общности, можно считать, что $m_0 < m_1$. В черных строках содержится по условию более $\frac{3}{4}m_1n$ черных клеток. Значит, в белых строках содержится менее $\frac{mn}{2}-\frac{3}{4}m_1n$ черных клеток. Но в черных строках содержится менее $\frac{1}{4}m_1n$ белых клеток. Таким образом, число клеток, цвет которых отличается от цвета содержащих их строк, меньше

$$\frac{mn}{2}-\frac{3}{4}m_1n+\frac{1}{4}m_1n=\frac{m_0n}{2}.$$

Получаем неравенство

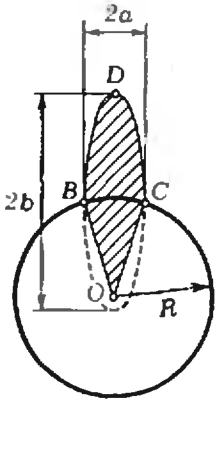
$$\frac{1}{2}(m_0n_1+m_1n_0)<\frac{m_0n}{2},$$

откуда $m_1 < m_0$, что противоречит предположению относительно m_0 и m_1.

С. Конягин, Ю. Нестеренко

Ф703. *Ракета запущена с поверхности Земли вертикально вверх с первой космической скоростью и возвращается на Землю недалеко от места старта. Сколько времени она находилась в полете? Радиус Земли $R=6400$ км.*

Примечание. Площадь эллипса с полуосями a и b равна $S=\pi ab$.



Траектория ракеты представляет собой часть очень вытянутого эллипса, в одном из фокусов которого находится центр Земли (см. рисунок). Скорость ракеты в верхней точке D траектории почти равна нулю.

Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{mv_0^2}{2}-G\frac{Mm}{R}\approx -G\frac{Mm}{2b}. \qquad (*)$$

Здесь M — масса Земли, m — масса ракеты, $v_0=\sqrt{GM/R}$ — начальная скорость ракеты (первая космическая скорость); $-G\frac{Mm}{R}$ и $-G\frac{Mm}{2b}$ — потенциальная энергия ракеты у поверхности Земли (при запуске) и в верхней точке траектории. Из (*) найдем большую полуось эллипса: $b\approx R$.

Из третьего закона Кеплера (квадраты периодов обращения по эллиптическим траекториям относятся как кубы больших полуосей эллипсов) следует, что полное время $T_э$ движения ракеты по всему эллипсу было бы равно периоду T_0 обращения спутника, движущегося по круговой орбите вблизи поверхности Земли, то есть

$$T_э=T_0=\frac{2\pi R}{\sqrt{GM/R}}=2\pi\sqrt{R/g}.$$

Из второго закона Кеплера (радиус-вектор, соединяющий тело, движущееся под действием силы тяготения по замкнутой орбите, с центром притяжения, за равные промежутки времени заметает равные площади) следует, что отношение времени движения T по половине эллипса (участок BDC) к полному периоду $T_э$ равно отношению площади заштрихованной на рисунке фигуры $OBDC$ к полной площади эллипса:

$$\frac{T}{T_э}=\frac{{}^1\!/_2\pi ab+ab}{\pi ab}.$$

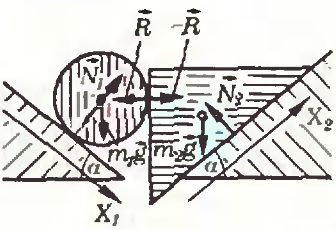
Отсюда находим время полета T:

$$T = T_9\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right) = (\pi+2)\sqrt{R/g} \approx 1 \text{ ч. } 9 \text{ мин.}$$

Е. Сурков

◆

Ф704. *По двум гладким наклонным плоскостям, образующим одинаковые углы α с горизонтом, движутся, касаясь друг друга, цилиндр и клин (см. рисунок). Найти, с какой силой клин давит на цилиндр. Масса цилиндра m_1, масса клина m_2. Трением между цилиндром и клином пренебречь.*



На цилиндр действуют сила тяжести $m_1\vec{g}$, сила $\vec{N}_1$ нормальной реакции со стороны левой наклонной плоскости и сила $\vec{R}$ нормальной реакции со стороны клина (сила $\vec{R}$ направлена горизонтально). Запишем уравнение движения цилиндра в проекциях на ось X_1, направленную вдоль левой наклонной плоскости (см. рисунок):

$$m_1a_1 = m_1g\sin\alpha - R\cos\alpha, \tag{1}$$

где a_1 — проекция ускорения цилиндра на ось X_1.

На клин действуют сила тяжести $m_2\vec{g}$, сила $\vec{N}_2$ нормальной реакции со стороны правой наклонной плоскости и сила нормальной реакции со стороны цилиндра, которая, согласно третьему закону Ньютона, равна $-\vec{R}$. Запишем уравнение движения клина в проекциях на ось X_2, направленную вдоль правой наклонной плоскости:

$$m_2a_2 = -m_2g\sin\alpha + R\cos\alpha. \tag{2}$$

В процессе движения клин соприкасается с цилиндром; поэтому, если перемещение клина вдоль оси X_2 равно Δx, то центр цилиндра (вместе с вертикальной гранью клина) сместится по горизонтали на $\Delta x\cdot\cos\alpha$. При этом вдоль левой наклонной плоскости (вдоль оси X_1) центр цилиндра сместится на Δx. Это означает, что в процессе движения клина и цилиндра выполняется соотношение

$$a_1 = a_2. \tag{3}$$

Решая совместно уравнения (1) — (3), найдем силу $|\vec{R}|$, с которой клин давит на цилиндр:

$$R = \frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}\,g\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

С. Кротов

◆

Ф705. *Горизонтально расположенный цилиндрический теплоизолированный сосуд объема $V_0 = 100$ л, заполненный гелием, разделен на две части теплонепроницаемым поршнем, который может перемещаться без трения. Газу, находящемуся в левой части сосуда, сообщают количество тепла $\Delta Q = 100$ Дж. Найти изменение давления в сосуде к тому моменту, когда поршень перестанет двигаться.*

После подведения тепла ΔQ газ в левой части сосуда расширяется, совершая работу ΔA. Эта работа целиком идет на увеличение внутренней энергии газа в правой части сосуда. Таким образом,

$$\Delta Q = \Delta U_1 + \Delta A = \Delta U_1 + \Delta U_2 = \frac{3}{2}R\left(\frac{m_1}{\mu}\Delta T_1 + \frac{m_2}{\mu}\Delta T_2\right). \quad (*)$$

Условие равновесия поршня до нагревания —

$$p_1 = p_2 = p,$$

уравнения состояния газа в левой и правой частях сосуда

$$pV_1 = \frac{m_1}{\mu}RT_1, \quad pV_2 = \frac{m_2}{\mu}RT_2,$$

где $V_1 + V_2 = V_0$. После нагревания, когда поршень уже не будет двигаться, давления в левой и правой частях уравняются. Обозначим увеличение давления в сосуде Δp; тогда

$$(p+\Delta p)(V_1+\Delta V) = \frac{m_1}{\mu}R(T_1+\Delta T_1),$$

$$(p+\Delta p)(V_2-\Delta V) = \frac{m_2}{\mu}R(T_2+\Delta T_2).$$

После простых преобразований получаем

$$\Delta p(V_1+V_2) = R\left(\frac{m_1}{\mu}\Delta T_1 + \frac{m_2}{\mu}\Delta T_2\right),$$

или (с учетом (*))

$$\Delta pV_0 = \frac{2}{3}\Delta Q.$$

Отсюда находим Δp:

$$\Delta p=\frac{\frac{2}{3}\Delta Q}{V_0}\approx 667\ \text{Н/м}^2.$$

Этот результат можно получить намного проще: при равновесии давление в сосуде всюду одинаково, значит, одинакова и плотность энергии (энергия единицы объема). Следовательно, увеличение плотности энергии составит $\Delta Q/V_0$; вспомнив известную формулу, связывающую плотность энергии идеального газа с давлением, сразу получим ответ.

А. Зильберман

Ф706. *Для горизонтального перемещения грузов на расстояние $L=20$ м используется самоходная тележка, перемещающаяся по горизонтальным рельсам. На тросе длины $l=5$ м к тележке подвешивают перемещаемый груз (рис. 1). Тележка половину времени движется равноускоренно, а половину — равнозамедленно. Определить возможные значения ускорения тележки, при которых груз после остановки тележки в конце пути будет неподвижным.*

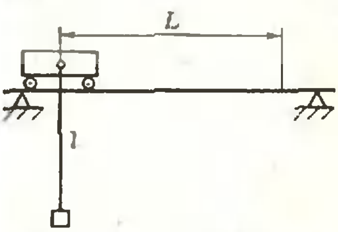


Рис. 1.

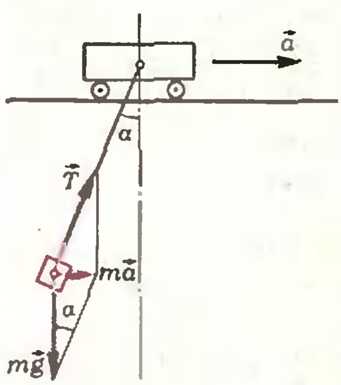


Рис. 2.

Поскольку начальная и конечная скорости тележки равны нулю, а время равноускоренного движения равно времени равнозамедленного движения, абсолютные значения ускорений при равноускоренном и равнозамедленном движениях равны; следовательно, пути, пройденные при этих режимах движения, равны между собой и равны $L/2$.

Рассмотрим движение груза, когда тележка движется с некоторым постоянным ускорением $\vec a$. В этом случае груз будет участвовать в двух движениях: он будет двигаться с ускорением $\vec a$ и, кроме того, совершать гармонические колебания в системе координат, связанной с тележкой. Положение равновесия при этих колебаниях находится из условия, что груз в этом положении под действием силы натяжения троса $\vec T$ и силы тяжести $m\vec g$ движется вдоль горизонтальной оси с ускорением $\vec a$. Из этих условий находим, что в положении равновесия трос отклонен от вертикали на угол α такой, что $\operatorname{tg}\alpha=|\vec a|/|\vec g|$ (рис. 2); поскольку α мало, $\operatorname{tg}\alpha\approx\alpha\approx|\vec a|/|\vec g|$.

Груз будет совершать колебания около этого положения равновесия с периодом $T=2\pi\sqrt{l\cos\alpha/g}\approx 2\pi\sqrt{l/g}$, а угловая амплитуда колебаний груза будет равна α.

При смене знака ускорения тележки угол α, определяющий отклонение троса от вертикали в положении равновесия, также меняет знак, то есть трос отклоняется на угол α в противоположную сторону. Для того чтобы груз оставался неподвижным после остановки тележки, на середине пути (при смене знака ускорения тележки) он должен находиться в первоначальном положении равновесия, то есть α должно быть равно нулю. Из этого следует, что за время t прохождения тележкой расстояния $L/2$ груз должен совершить целое число n полных колебаний, то есть

$$t=nT,\ \text{где}\ n=1,2,3,\ldots$$

Из условия

$$\frac{L}{2}=\frac{at^2}{2}=\frac{an^2T^2}{2}=\frac{2\pi^2n^2al}{g}$$

находим набор значений ускорения, при которых после остановки тележки груз будет оставаться неподвижным:

$$a_n=\frac{1}{n^2}\frac{Lg}{4\pi^2 l}=\frac{1}{n^2}\ \text{м/с}^2.$$

В. Можаев

Ф707. *Объектив телескопа Гейла имеет диаметр $D=250$ см и фокусное расстояние $F=160$ м. Телескоп используется для фотографирования искусственного спутника Земли, имеющего диаметр $d=200$ см и находящегося на расстоянии $L=320$ км.*

1) Расстояние f от объектива до плоскости изображения спутника определяется из формулы линзы:

$$f=\frac{LF}{L-F}=\frac{F}{1-F/L}.$$

Поскольку $F\ll L$, можно приближенно записать

$$f\approx F(1+F/L).$$

Расстояние от фокуса объектива до плоскости изображения

1) На каком расстоянии от фокуса должна быть расположена фотопластинка?
2. Каким будет размер изображения искусственного спутника?
3) Каков будет диаметр возможных размытых (несфокусированных) изображений звезд на фотографии?

равно

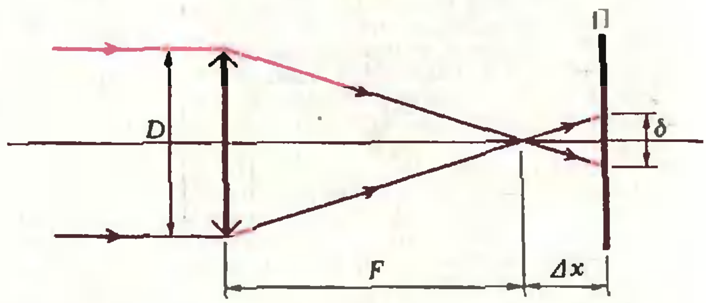
$$\Delta x = f - F = F^2/L = 8 \text{ см}.$$

На этом расстоянии от фокуса должна быть установлена фотопластинка.

2) Размер изображения спутника равен

$$l = \frac{f}{L} d \approx \frac{F}{L} d = 10^{-1} \text{ см}.$$

3) Изображения далеких звезд должны располагаться в фокальной плоскости объектива. В плоскости фотопластинки,



находящейся на расстоянии Δx от фокальной плоскости, изображения звезд окажутся размытыми (несфокусированными). Как видно из рисунка, диаметр размытого изображения звезды на фотопластинке (П) равен

$$\delta = D\frac{\Delta x}{F} = 1{,}25 \cdot 10^{-1} \text{ см}.$$

Оценим влияние дифракции. Далекие звезды вследствие дифракции должны изображаться в фокальной плоскости не точками, а дифракционными пятнами, радиус ϱ которых определяется выражением $\varrho = \frac{\lambda}{D} F$. В нашем случае порядок этой величины — 10^{-3}. Поскольку $\varrho \ll \delta$, дифракция оказывается несущественной, и размер несфокусированных изображений звезд определяется практически только геометрическим расхождением пучков.

С. Козел

Список читателей, приславших правильные решения

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М676—М690; Ф692—Ф707 (жирные цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Большинство читателей, приславших свои решения, справились с задачами **М676**, **М681**, **М686**, **М687**. Остальные задачи решили: *Т. Алавидзе* (Москва) **88**; *М. Алексеев* (Москва) **78, 84, 85, 89**; *И. Альтман* (Одесса) **88**; *С. Асеев* (Николаев) **88**; *В. Барабанов* (Севастополь) **78**; *Ю. Баркаган* (Пенза) **78**; *Ю. Беспалов* (Шостка) **82, 85, 88**; *И. Бинус* (Пенза) **78, 85, 89**; *В. Валуев* (Тула) **78**; *Л. Гареев* (Уфа) **85**; *А. Гохберг* (Донецк) **77, 78**; *О. Гринив* (Киев) **77, 84**; *Н. Гришко* (Киев) **78, 79, 84**; *А. Дубицкас* (Таураге) **78, 82, 83, 88—90**; *М. Елисеев* (п. Нововоронежский Воронежской обл.) **78, 84, 85, 88—90**; *О. Ерошкин* (Днепропетровск) **78, 83, 85, 88, 89**; *И. Жуков* (Ленинград) **78, 83—85, 89**; *М. Заславский* (Харьков) **78**; *П. Зусманович* (Алма-Ата) **90**; *Н. Итенберг* (Ленинград) **78, 82—85, 88, 90**; *А. Казмерчук* (Киев) **89**; *Д. Калюжный* (Одесса) **78, 80, 89**; *В. Кисиль* (Одесса) **77—79, 82, 84, 85**; *А. Корсуков* (Ачинск) **78, 82, 83, 85**; *И. Кудряшов* (Ленинград) **77—79, 83—85, 88**; *И. Ласкин* (Алексин) **77**; *Л. Лейцин* (Чернигов) **82, 84, 85, 89**; *С. Мамедов* (Баку) **78**; *Д. Миллионщиков* (Москва) **77, 78, 80**; *А. Мильман* (Одесса) **77, 78, 82, 88—90**; *Ю. Николаевский* (Харьков) **78**; *А. Никонов* (Кировоград) **77, 78, 80, 84, 89**; *М. Овецкий* (Донецк) **77**; *А. Пайак* (Лодзь, ПНР) **79**; *К. Панкратов* (Куйбышев) **83**; *Г. Перельман* (Ленинград) **77—80, 82—85, 89**; *В. Поярков* (Николаев) **78, 89**; *С. Путинцев* (Невинномысск) **77—80, 84, 85**; *А. Родионов* (Москва) **78**; *И. Савельев* (п. Черноголовка Московской обл.) **79, 84, 85**; *Е. Сазонов* (Москва) **79**; *А. Сикса* (Киев) **78**; *Н. Солодовникова* (Долгопрудный) **79**; *С. Спичак* (Припять) **89**; *Э. Степанян* (Баку) **89**; *В. Титенко* (д. Блужа Минской обл.) **82—85**; *Г. Трунов* (Москва) **85**; *Е. Тюрин* (Вильнюс) **77, 78**; *Р. Угриновский* (Хмельник) **77, 79, 82, 88**; *Ю. Усачев* (Киев) **77**; *В. Фрегер* (Вольск) **82, 83, 89**; *А. Хохлов* (Москва) **78, 83—85, 88—90**; *Т. Хусейнов* (Душанбе) **78**; *П. Цветков* (Подольск) **77, 89, 90**; *Р. Цоуф* (Прага, ЧССР)

82, 83, 85; *О. Чалых* (Витебск) **77, 78, 82—85, 88, 90**; *Г. Чевардин* (Челябинск) **88**; *А. Шигарев* (Сибай) **79**; *В. Ярош* (Ленинград) **77—79, 82—85, 88—90**.

Физика

Почти все читатели, приславшие свои решения, справились с задачами **Ф693**, **Ф700** и **Ф701**. Остальные задачи решили: *Е. Абедимов* (п. В. Березовка Восточно-Казахстанской обл.) **04, 05**; *М. Авдыев* (Мары) **94**; *В. Айгарс* (Рига) **05**; *И. Алексеев* (Москва) **94—96, 98, 02, 04**; *Э. Алиев* (Баку) **94, 96, 98, 99, 04**; *И. Альтман* (Одесса) **94, 98, 99, 04, 06**; *Д. Асмус* (Челябинск) **95, 96**; *А. Астахов* (Железнодорожный) **94, 96, 02, 04**; *А. Бабаев* (Баку)**94—96, 98, 99, 06**; *Э. Багдасарян* (Баку) **94, 04**; *Я. Базалий* (Донецк) **94—97, 99, 03—07**; *Д. Басалаев* (Черногорск) **05, 06**; *О. Бендер* (Запорожье) **04—07**; *Ю. Беспалов* (Шостка) **94—06**; *Ю. Бобрышев* (Ворошиловград) **99, 04**; *С. Бочко* (Братск) **94, 95**; *Б. Вейцман* (Одесса) **94—07**; *С. Вознюк* (Харьков) **96, 04—07**; *С. Выгран* (Запорожье)**99, 04, 06**; *И. Гавриков* (Москва) **96, 98, 99, 05**; *Э. Гасанов* (Порт-Ильич) **96**; *Д. Гирич* (Волгоград) **95, 98, 99**; *К. Григоришин* (Запорожье) **94, 96—98, 04—07**; *И. Гурович* (Одесса) **94, 98, 99, 04**; *В. Добрецов* (Москва) **98**; *И. Доценко* (Москва) **94, 03—05**; *В. Евстратов* (Ленинград) **98, 99, 04—06**; *В. Жилин* (Уральск) **99, 04**; *М. Житомирский* (Харьков) **98, 04, 05**; *Г. Жуков* (Шумерля) **95**; *М. Жяконис* (Каунас) **96—99, 02**; *Е. Касперский* (Долгопрудный) **94, 98, 99, 04, 06**; *А. Колежук* (Киев) **94, 95, 98, 99**; *В. Комов* (Александров) **95—99, 03—07**; *В. Криман* (Винница) **04, 05**; *С. Крюковский* (Владивосток) **04—07**; *А. Кубельский* (Москва) **02**; *А. Кубышкин* (Киев) **94—96, 98, 02—06**; *Л. Кудрявцев* (Нефтекамск) **94, 95, 06, 07**; *А. Кузьменко* (Киев) **04**; *О. Кузьмин* (Ташкент) **98**; *И. Куколев* (Сызрань) **94**; *Ф. Курбанов* (п. Ленин Аз. ССР) **98, 05**; *И. Куянов* (Казань) **98, 99**; *Г. Ландсберг* (п. Протвино Московской обл.) **98**; *И. Ласкин* (Алексин) **95**; *А. Латынин* (Киев) **99**; *А. Логовой* (Ростов-на-Дону) **95, 96, 98**; *И. Маловичко* (Северодонецк) **98, 99, 06**; *М. Манцев* (Ставрополь) **98**; *Х. Матчанов* (Хорезмская обл. Уз. ССР) **05**; *А. Миленин* (Люберцы) **98, 99, 02, 04, 06, 07**; *А. Мильман* (Одесса) **94, 96, 98, 99, 02**; *В. Михайловский* (Магнитогорск) **07**; *С. Молоков* (Ставрополь) **98, 03—06**; *В. Молчанов* (Киев) **94, 98, 02, 04, 06**; *П. Морозов* (Тула) **99**; *А. Мосунов* (п. Магнитка Челябинской обл.) **94, 96**; *Ю. Мочалов* (Калининград Московской обл.) **99**; *Д. Мукушев* (с. Арнат Семипалатинской обл.) **03**; *Е. Мурзахметов* (Джезказган) **94—96, 98, 99**; *Х. Мургазиев* (Андижан) **98, 99**; *С. Некрасов* (Череповец) **94, 96**; *К. Немченко* (Донецк) **94—96, 98, 04, 05**; *П. Никитин* (Великие Луки) **03, 04**; *Д. Овечкин* (Набережные Челны) **04, 05**; *Р. Овчарек* (Щецин, ПНР) **05**; *А. Охапкин* (Львов) **95, 96**; *Е. Паганкер* (Ереван) **04**; *З. Пиличев* (Кавадарци, СФРЮ) **98**; *А. Панасюк* (Одесса) **98, 99**; *К. Панкратов* (Куйбышев) **96**; *В. Пентегов* (Киев) **96—98, 04—06**; *С. Пильтяй* (Ангарск) **04, 05**; *А. Пироженко* (Мытищи) **94, 96—99, 03—07**; *В. Погорелов* (Узловая) **94, 96, 98, 99**; *М. Половинченко* (Киев) **94, 99, 05**; *В. Потапчук* (д. Саковцы Братской обл.) **98, 99, 02**; *М. Пустильников* (Свердловск) **04**; *А. Радионов* (п. Никольское Ленинградской обл.) **94, 96, 98, 03—07**; *М. Рахминов* (Алма-Ата) **96, 98, 99, 03—05**; *В. Родионов* (Ленинск Кзыл-Ординской обл.) **04**; *М. Розенберг* (Ленинград) **04**; *Н. Розенвайн* (Киев) **98, 99**; *В. Романов* (Тула) **94**; *Л. Ростока* (Хуст) **07**; *В. Руденко* (с. Геронимовка Черкасской обл.) **96**; *Л. Салахов* (Сумгаит) **99**; *Д. Свириди* (Москва) **94, 95, 98, 03—06**; *Ю. Синюков* (ст. Селезни Тамбовской обл.) **94, 99, 04**; *И. Сираков* (Асеновград, НРБ) **04, 06**; *И. Соколова* (Феодосия) **04, 07**; *И. Соколовский* (Покров) **95, 07**; *С. Соломко* (Мелеуз) **99, 02, 06**; *М. Стежко* (Брест) **95, 96, 99**; *Ю. Талденко* (Сумы) **94—96, 99, 03, 04, 07**; *А. Терещенко* (с. Нерудсталь Днепропетровской обл.) **04—06**; *И. Тихоненко* (совх. Новоомский Омской обл.) **94—96, 98, 99, 02**; *А. Тищенко* (Днепропетровск) **94—97, 99, 05, 06**; *О. Третьяков* (Омск) **98**; *К. Трофимов* (Владивосток) **94**; *Г. Трунов* (Москва) **94, 97—99, 07**; *Н. Федин* (Омск) **94, 95, 98, 99, 03, 06**; *Е. Федущенко* (Харьков) **05**; *В. Фельдман* (Саратов) **95, 96, 05, 06**; *Н. Фесун* (Золотоношский р-н Черкасской обл.) **96, 99**; *С. Фищенко* (Москва) **03—07**; *А. Хельвас* (Киев) **99, 02**; *А. Ходарин* (п. Нововоронежский Воронежской обл.) **94, 95, 03—05, 07**; *С. Цыганков* (Киев) **02**; *А. Черныш* (Новосибирск) **94**; *Ю. Чернышев* (Москва) **03—06**; *А. Шатов* (Черкассы) **03—05**; *П. Шихалиев* (с. Беюк-Дахна Аз. ССР) **95, 96**; *А. Шрамков* (п. Волоконовка Белгородской обл.) **95, 99**; *А. Шугай* (Запорожье) **95, 99, 03, 04**; *А. Шулепов* (Каменск-Уральский) **98**; *Ю. Щедрин* (Брянск) **94, 95, 98, 99, 06**; *В. Ярош* (Ленинград) **94, 95, 97—99, 02—07**; *В. Ясинский* (Могилев-Подольский) **98**.

Наша обложка

На обложке показан орнамент с «переменным рисунком», демонстрирующий сочетание случайного и закономерного. Орнамент, нарисованный ЭВМ, получается многократным отражением ячейки, имеющей форму равностороннего треугольника, от ее сторон (найдите границы такой ячейки). Для четырех угловых положений ячейки заданы четыре случайных варианта рисунка в виде нескольких отрезков и ломаных, которые делят ячейку на части, окрашиваемые в различные цвета. Случайные рисунки в углах получены специальной программой, использующей «датчик случайных чисел». Для промежуточных положений ячейки рисунок рассчитывается программой так, чтобы обеспечить постепенный переход от одного варианта к другому.

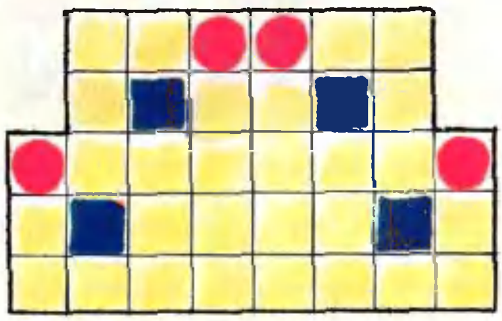
Меняя параметры в программах, можно заставить «электронного художника» нарисовать неограниченное количество вариаций на заданную тему.

Ю. Котов

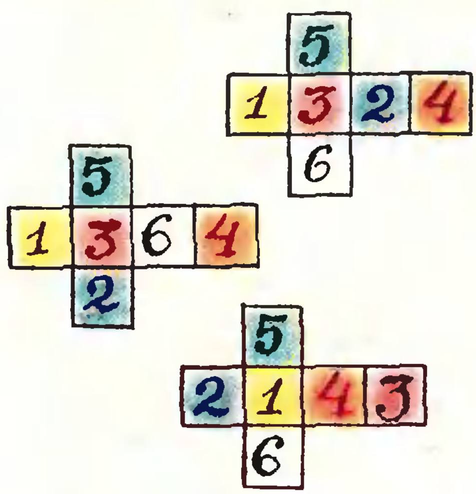
Квант для младших школьников

Задачи

1. На рисунке изображены два числовых ребуса. В каждом из них одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные. Расшифруйте эти ребусы.



2. Разрежьте изображенную на рисунке фигуру на четыре конгруэнтные части и сложите из них квадрат так, чтобы красные кружочки и синие квадратики оказались симметричными относительно всех осей симметрии квадрата.



3. Из трех «выкроек», изображенных на рисунке, собрали три кубика; затем из этих кубиков склеили прямоугольный параллелепипед $1 \times 1 \times 3$. На четырех гранях параллелепипеда оказались написанными четыре трехзначных числа (положение цифры в квадрате не имеет значения). Каково наибольшее возможное значение суммы этих чисел?

4. На столе стоят семь коробочек. Средняя коробочка пустая, а в остальных шести коробочках лежит по две монеты: снизу — пятак, сверху — «двушка».
Разрешается перекладывать по одной монете в соседнюю коробочку, но нельзя пятак класть на «двушку». Кроме того, в пятой коробочке не должно оказываться более трех монет, а в остальных — более двух.
Можно ли переложить монеты так, чтобы а) в первых трех коробочках лежало по две «двушки», а в последних трех — по два пятака, б) в первых трех коробочках лежало по два пятака, а в последних трех — по две «двушки»?

Эти задачи нам предложили
Н. Антонович,
Ф. Бартенев, А. Швецов

Н. Иванова

Самосовмещения фигур и геометрические задачи

На занятии математического кружка учитель предложил ребятам *восстановить границу участка, имеющего форму квадрата, если сохранились два столба на противоположных сторонах изгороди и дерево, растущее в центре участка.*

Как решать эту задачу? Один из членов кружка сделал рисунок, считая, что задача решена (рис. 1). Стало ясно, что нужно знать положение хотя бы одной из сторон квадрата. На стороне AD известна точка N. Нельзя ли найти еще точку на этой стороне? Немного подумав, ребята догадались: «Надо повернуть квадрат вокруг центра O на 180°; при этом точка M перейдет в точку M_1, лежащую на $[AD]$, — ведь при повороте $R_O^{180°}$ квадрат отображается на себя!» (рис. 2) — и ребята легко решили задачу (как?).

Тогда учитель предложил членам кружка *восстановить границу участка, имеющего форму квадрата, если сохранились два столба на смежных сторонах изгороди и дерево, растущее в центре участка.*

Немного подумав, ребята сообразили, что и здесь надо использовать одно из самосовмещений квадрата: поворот вокруг центра O на 90° (рис. 3).

«Молодцы, — сказал учитель. — Вот вам задача потруднее» — и он нарисовал на доске квадрат. Затем через его вершины он провел прямые, делящие противоположные стороны квадрата пополам, и заштриховал фигуру, образованную пересекающимися прямыми (рис. 4). «Какую фигуру я заштриховал?».

Посмотрев на рисунок, ребята сразу догадались, что это квадрат. Но как это доказать? Оказывается, и здесь можно привлечь самосовмещения квадрата. В самом деле, повернем данный квадрат вокруг центра на 90°; при этом повороте заштрихованный выпуклый четырехугольник отобразится на себя. Значит, он — квадрат (почему?).

Один из самых активных участников кружка Петя спросил: «Поче-

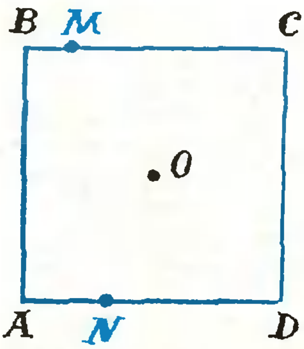


Рис. 1.

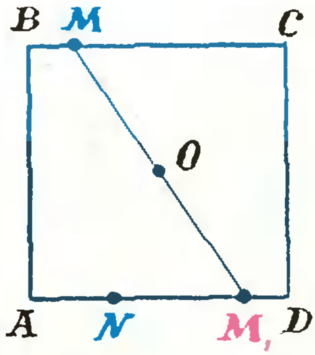


Рис. 2.

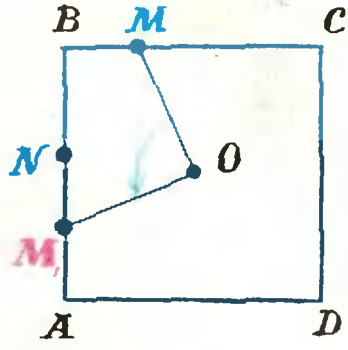


Рис. 3.

му мы все время рассматриваем квадрат?».

Вместо ответа учитель нарисовал на доске равносторонний треугольник, провел через его вершины прямые, отсекающие $\frac{1}{3}$ противоположной стороны (рис. 5), и спросил: «Какую фигуру образуют проведенные прямые?»

«Наверное, это равносторонний треугольник, — сказал Петя, — но как это доказывать, я не знаю. Может, здесь нужно использовать самосовмещения равностороннего треугольника?».

«А какие самосовмещения и сколько имеет равносторонний треугольник?» — спросил учитель.

После некоторых размышлений ребята пришли вот к чему: «При самосовмещениях равностороннего треугольника его вершины переходят в себя. Значит, у равностороннего треугольника столько самосовмещений, сколько перестановок можно сделать из трех букв. Таких перестановок шесть: значит, и самосовмещений не больше шести. Вот они: тождественное, повороты $R_O^{120°}$, $R_O^{-120°}$ и осевые симметрии S_{l_1}, S_{l_2}, S_{l_3} (O — центр треугольника, l_1, l_2, l_3 — его медианы)».

Ребята сообразили, что в последней задаче надо рассмотреть поворот вокруг центра треугольника на 120°. При этом повороте заштрихованный треугольник перейдет в себя. Отсюда следует, что он — равносторонний (почему?). Задача решена.

В заключение учитель предложил ребятам самостоятельно решить дома следующие задачи:

1. *Докажите, что «внутренность» правильной пятиугольной звезды (рис. 6) есть правильный пятиугольник.*

2. *К двум окружностям проведены две внешние и две внутренние касательные. Докажите, что точка пересечения внешних и точка пересечения внутренних касательных лежат на прямой, проходящей через центры данных окружностей.*

3. *Докажите, что параллелограмм, вписанный в окружность, является прямоугольником.*

4*. *Постройте квадрат, если на каждой его стороне задано по точке.*

Он рекомендовал также прочитать в «Кванте» статью «Самосовмещения квадрата и тайнопись» (1980, № 12).

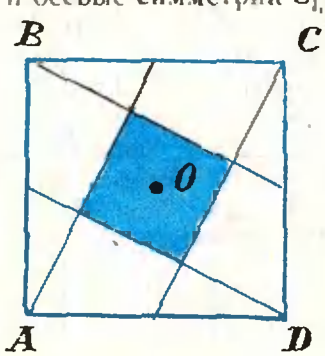


Рис. 4.

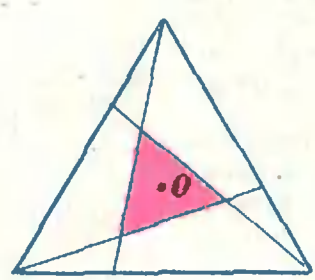


Рис. 5.

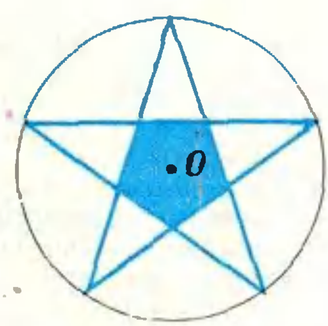


Рис. 6.

В. Можаев

Фотоны

Занимаясь анализом полученных на опыте закономерностей электромагнитного излучения нагретых тел, Планк в 1900 году выдвинул гипотезу, которая коренным образом изменила ряд фундаментальных представлений классической физики и легла в основу квантовой теории. Согласно гипотезе Планка, энергия, излучаемая микроскопическими объектами (атомами, молекулами), может принимать не любые, а только определенные, дискретные значения, кратные минимальной порции

$$E=h\nu.$$

Здесь ν — частота излучения, а h — некоторая постоянная величина, получившая название постоянной Планка.

Развивая теорию квантов, Эйнштейн высказал гипотезу о том, что само электромагнитное излучение имеет прерывистую структуру, состоит из отдельных световых частиц (корпускул) — фотонов. Энергия фотона равна $h\nu$, а его импульс $P=h\nu/c=h/\lambda$ (где c — скорость света, а λ — длина волны). На основе таких представлений о свете Эйнштейн в 1905 году построил количественную теорию фотоэлектрического эффекта.

Рассмотрим теперь несколько конкретных примеров, в которых проявляются именно корпускулярные свойства света.

Задача 1. *На рисунке 1 приведен экспериментально полученный график зависимости задерживающей разности потенциалов $U_з$ (то есть напряжения между катодом и анодом, при котором ток в вакуумном фотоэлементе становится равным нулю) от частоты ν падающего света. С помощью этого графика найдите значение постоянной Планка, работу выхода электронов из катода и красную границу фотоэффекта.*

При освещении фотокатода светом происходит взаимодействие квантов света с электронами вещества, причем в случае фотоэффекта речь идет о слабо связанных с атомами электронах, то есть электронах проводимости. При взаимодействии фотона с одним из таких электронов энергия фотона $h\nu$ полностью передается электрону, и, если этой дополнительной энергии будет достаточно, электрон сможет покинуть поверхность фотокатода.

Максимальная кинетическая энергия $E_к$ электрона определяется уравнением Эйнштейна для фотоэффекта:

$$E_к=h\nu-A,$$

где A — работа выхода электрона с поверхности освещаемого вещества в вакуум. Очевидно, что фототок станет равным нулю, то есть выбитые с поверхности катода электроны не дойдут до анода, если задерживающая разность потенциалов между

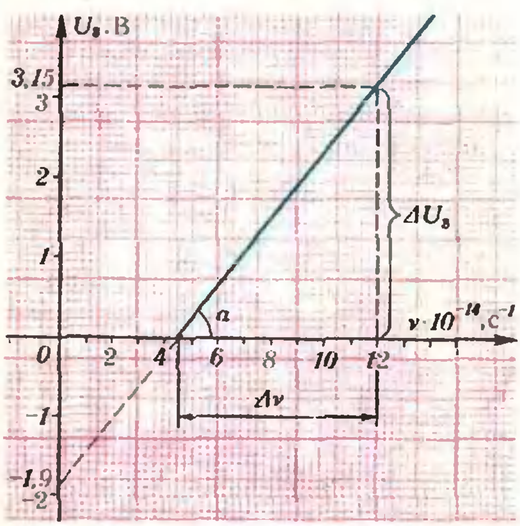


Рис. 1.

катодом и анодом будет равна

$$U_з = \frac{E_к}{e}, \text{ или } U_з e = E_к,$$

где e — заряд электрона. Подставив это выражение в основное уравнение, получим формулу, связывающую $U_з$ и частоту света ν:

$$U_з = \frac{h}{e}\nu - \frac{A}{e}.$$

Как видно из этой формулы, отношение постоянной Планка h к заряду электрона e равно тангенсу угла наклона α экспериментальной прямой (см. рис. 1); следовательно,

$$h = e\,\mathrm{tg}\,\alpha + \frac{e\Delta U_з}{\Delta\nu} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл} \cdot 3{,}15\ \text{В}}{7{,}5 \cdot 10^{14}\ \text{Гц}} \approx$$
$$\approx 6{,}7 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с}$$

Для определения работы выхода A продолжим экспериментальную прямую до пересечения с вертикальной осью. Величина отсекаемого отрезка, выраженная в электрон-вольтах, и будет равна работе выхода:

$$A = 1{,}9\ \text{эВ}.$$

Красной границей фотоэффекта называют наименьшую частоту света $\nu_к$, при которой возникает фотоэффект. Как видно из графика,

$$\nu_к = 4{,}5 \cdot 10^{14}\ \text{Гц}.$$

Задача 2. *Свет от Солнца падает на плоское зеркало площадью $S = 1$ м^2 под углом $\alpha = 60°$. Найдите силу светового давления, считая, что зеркало полностью отражает весь падающий на него свет. Известно, что средняя мощность солнечного излучения, приходящаяся на 1 м^2 земной поверхности, перпендикулярной к излучению, равна $P = 1{,}4 \cdot 10^3$ Вт/м^2.*

Прежде всего обсудим, почему вообще существует световое давление и как его объяснить с квантовой точки зрения.

Падающие на зеркало фотоны упруго отражаются от него, при этом импульс фотонов изменяется. Это изменение обусловлено импульсом силы, действующей со стороны зеркала на фотоны в момент отражения (взаимодействия с зеркалом). По третьему закону Ньютона точно

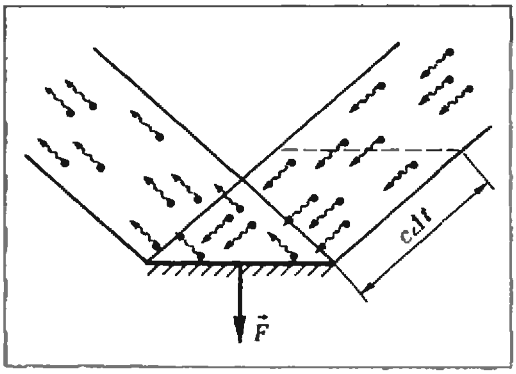


Рис. 2.

такая же сила (по модулю) будет действовать на зеркало со стороны фотонов (рис. 2). Она и создает световое давление.

Теперь проведем расчет. Найдем сначала импульс силы, действующей на зеркало в течение промежутка времени Δt со стороны фотонов, обладающих энергией $h\nu_i$, где ν_i — некоторая фиксированная частота. Пусть концентрация таких фотонов в падающем потоке равна n_i. Тогда за время Δt на зеркало попадут $n_i c\Delta t S \cos\alpha$ фотонов (c — скорость света). Их суммарный импульс до взаимодействия с зеркалом равен

$$P_1 = (n_i c\Delta t S \cos\alpha)mc =$$
$$= n_i S \cos\alpha \cdot h\nu_i \Delta t.$$

После отражения импульс изменяется по направлению (угол отражения равен углу падения), а по модулю остается тем же:

$$P_2 = P_1.$$

Таким образом, изменение импульса

$$\Delta P = |\vec{P}_2 - \vec{P}_1| = 2n_i h\nu_i S \cos^2\alpha \cdot \Delta t,$$

и сила давления на зеркало со стороны фотонов данного сорта

$$F_i = \frac{\Delta P}{\Delta t} = 2n_i h\nu_i S \cos^2\alpha.$$

Суммарная сила давления со стороны всех фотонов

$$F = \Sigma F_i = 2S\cos^2\alpha \cdot \Sigma n_i h\nu_i.$$

Поскольку мощность солнечного излучения, приходящаяся на единицу площади поверхности, перпендикулярной к направлению излучения, равна

$$P = c\Sigma n_i h\nu_i,$$

окончательное выражение для силы F будет иметь вид

$$F=2\frac{P}{c}S\cos^2\alpha\approx 2{,}3\cdot 10^{-6}\text{Н}.$$

Задача 3. *Тепловой фотоприемник представляет собой полую камеру с небольшим отверстием (рис. 3). Отношение площади внутренней поверхности камеры к площади отверстия $S/\sigma=\beta=200$. На отверстие падает монохроматический пучок фотонов; сечение пучка равно сечению входного отверстия. При зеркальной внутренней поверхности камеры отношение концентрации фотонов в полости к концентрации фотонов в пучке равно $n_1/n_0=4$. Чему будет равно аналогичное отношение, если коэффициент поглощения стенок приемника будет равен $k=0{,}01$? Излучением стенок можно пренебречь.*

В первом случае, когда внутренняя поверхность фотоприемника полностью отражает падающее на нее излучение, в стационарном состоянии (в установившемся режиме) число фотонов, попадающих в полость приемника в единицу времени, равно числу фотонов, покидающих полость приемника. Если концентрация фотонов в падающем пучке n_0, а площадь входного отверстия приемника σ, то число фотонов, попадающих в приемник в единицу времени, равно

$$N_0=n_0c\sigma,$$

где c — скорость света. Число фотонов, покидающих приемник в единицу времени, пропорционально концентрации фотонов n_1 в приемнике, площади отверстия σ и скорости фотонов c:

$$N_1=\alpha n_1c\sigma,$$

где α — постоянный коэффициент пропорциональности. Из условия

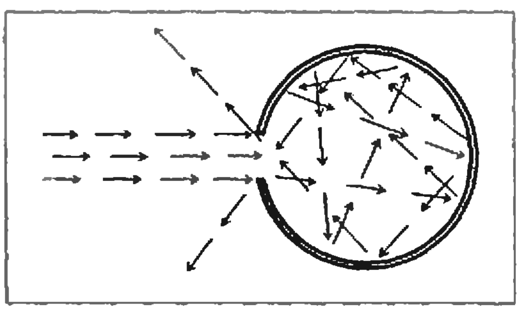


Рис. 3.

стационарности $N_0=N_1$ получим

$$\alpha=n_0/n_1=1/4.$$

Во втором случае, когда стенки полости частично поглощают фотоны, в установившемся режиме число фотонов N_0, попадающих в полость приемника в единицу времени, равно числу фотонов N_2, покидающих полость через входное отверстие приемника в единицу времени, плюс число фотонов N_2', поглощаемых стенками полости за это же время:

$$N_0=N_2+N_2',$$

или

$$n_0c\sigma=\alpha n_2c\sigma+k\alpha n_2cS,$$

где n_2 — новая концентрация фотонов в полости приемника, S — площадь внутренней поверхности полости. Из последнего равенства найдем

$$\frac{n_2}{n_0}=\frac{1}{\alpha(1+k\beta)}=\frac{4}{3}.$$

Задача 4. *Найдите изменение длины волны света, излучаемого атомом водорода, вследствие отдачи, которую испытывает ядро атома со стороны вылетающего кванта света.*

Запишем законы сохранения энергии и импульса для изолированной системы атом водорода — фотон.

В начальный момент, до излучения фотона, эта система представляет собой неподвижный атом водорода, находящийся в возбужденном состоянии, то есть его электрон занимает не самый низкий энергетический уровень E_1, а какой-то более высокий уровень E_k. (Возбуждение атома может быть вызвано неким внешним воздействием, например столкновением с другим атомом или свободным электроном или поглощением кванта света.) Пусть разность энергий электрона в этом случае $E_k-E_1=h\nu_0$. Тогда полная энергия атома равна сумме энергии покоя ядра (протона) m_pc^2 и энергии электрона E_k, а импульс атома равен нулю.

После излучения атомом фотона с некоторой энергией $h\nu$ изолированная система будет включать в себя фотон и атом водорода, который вследствие отдачи приобретет некоторую скорость v. Полная энергия системы в этом случае будет равна $m_pc^2+E_1+m_pv^2/2+h\nu$, а импульс системы будет равен

$$h\nu/c-m_pv.$$

Согласно законам сохранения энергии и импульса, можно записать

$$m_pc^2+E_k=m_pc^2+E_1+\frac{m_pv^2}{2}+h\nu$$

и

$$0=\frac{h\nu}{c}-m_pv.$$

Учитывая, что $E_k-E_1=h\nu_0$, получим

$$h\Delta\nu=h\nu-h\nu_0=-\frac{m_pv^2}{2}=$$

$$=-\frac{m_p(h\nu)^2}{2m_p^2c^2}=-\frac{(h\nu)^2}{2m_pc^2},$$

или

$$\Delta\nu=-\frac{h\nu^2}{2m_pc^2}=-\frac{h}{2m_p\lambda^2}.$$

При относительно малых изменениях частоты ($\Delta\nu\ll\nu$)

$$\Delta\nu=\Delta\left(\frac{c}{\lambda}\right)=-\frac{c}{\lambda^2}\Delta\lambda.$$

Тогда окончательно

$$\Delta\lambda=\frac{h}{2m_pc}\approx 6{,}7\cdot 10^{-16}\ \text{м}.$$

Упражнения

1. Найдите среднее число n фотонов, попадающих в глаз за единицу времени, если смотреть на электрическую лампочку накаливания мощностью $P=200$ Вт с расстояния $l=10$ м. Средняя длина волны излучения лампочки $\lambda=6\cdot10^{-7}$ м. Диаметр зрачка глаза примите равным $d=2$ мм. Рассеянием и поглощением света можно пренебречь.

2. До какого максимального потенциала φ_{max} зарядится уединенный медный шарик, если его облучать ультрафиолетовым светом с длиной волны $\lambda=2\cdot10^{-7}$ м? Работа выхода электрона для меди $A=4{,}47$ эВ.

3. Рубиновый лазер, работающий в импульсном режиме с длительностью импульса $\tau=5\cdot10^{-4}$ с, излучает параллельный пучок света с энергией $E=1$ Дж. Определите силу F светового давления на шарик, освещаемый этим светом, если диаметр шарика равен диаметру лазерного пучка, а поверхность шарика полностью поглощает падающее на шарик излучение.

4. Какую частоту ν фотона зарегистрирует неподвижный приемник, если фотон испущен движущимся атомом вдоль направления его движения? Скорость атома v ($v\ll c$, где c — скорость света). В случае неподвижного атома частота излучаемого фотона равна ν_0. Указание. Воспользуйтесь приближением: для $\alpha\ll1$ $\sqrt{1+\alpha}\approx1+\alpha/2$.

Все врут календари?

(*Начало см. на с. 19*)

Мы перепечатываем несколько «малых форм» Евг. Сазонова, опубликованных в разное время в «Литературной газете».

Из цикла «Математизмы»

Среди людей
привычного мне круга
(А у меня
культурные друзья)
Есть мнение,
что квадратуру круга,
Как ты ни бейся,
доказать нельзя.
Ну, и не надо!
Стоит ли тужить?
И времени,
и сил пустая трата...
Не лучше ли
усилья приложить,
Чтоб доказать округлость
у квадрата?

Из цикла «Диалоги»

— Как вы относитесь к теории относительности? — спросил Евг. Сазонова знакомый ученый.

— Относительно неплохо,— ответил людовед.

Из россыпи незацикленного

Изучает физик пи-мезоны,
И, наверно, в этом есть резон;
Я же по утрам стригу газоны,
Чтобы свежий был в саду озон!

* * *

Ты синтезируй мне, браток,
Скорей искусственный желток!

* * *

Не всяк, кто знает синхрофазотрон,
Ввинтить сумеет лампочку в патрон!

Московский инженерно-физический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Имеется два сплава меди и серебра, причем в первом сплаве процентное содержание меди (по весу) на 45% больше, чем во втором. Сплавив кусок первого сплава, содержащий 6 кг меди, с куском второго сплава, содержащим 12 кг меди, получили слиток, содержащий $p\%$ меди. Определите процентное содержание серебра в первом сплаве.

2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ $|SC|=l$ и ребро $[SC]$ составляет с плоскостью основания угол величиной α. На высоте $[SO]$ пирамиды взята точка S_1 такая, что сумма расстояний от этой точки до вершины S и до точек C_1, A_1, B_1, являющихся серединами сторон $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ треугольника, лежащего в основании пирамиды, имеет наименьшее значение. Определите объем пирамиды $S_1A_1B_1C_1$.

3. Найдите все значения $a \in \mathbf{R}$, при которых выполняется неравенство

$$\int\limits_{-1-a}^{-2a} \frac{dx}{x+a} > \log_{a^2}(2^{\log_2 e}).$$

4. Найдите $f'(x)$ и критические точки функции

$$f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 2x} + x + 0{,}25 \sin 4x + \ln \frac{1}{3}.$$

Вариант 2

1. Из одного и того же пункта, расположенного на прямолинейном пути, одновременно в одном направлении с разными, но постоянными скоростями вышли два пешехода. Через два часа расстояние между ними было равно s км. После этого пешеходы пошли быстрее и стали затрачивать на каждый километр пути на 10 мин меньше. Еще через 2 ч расстояние между ними стало равно $3s$ км. Определите пути, пройденные пешеходами за первые 2 ч движения.

2. В прямой круговой конус с образующей l и высотой H вписана правильная шестиугольная призма так, что нижнее основание призмы лежит в плоскости основания конуса, а вершины верхнего основания принадлежат конической поверхности. Найдите площадь основания призмы, если известно, что площадь полной поверхности этой призмы наибольшая из всех возможных.

3. Вычислите интегралы $I_1=\int\limits_4^8 \frac{dx}{2x}$ и

$$I_2=\int\limits_{\frac{144}{169}}^{\frac{165}{169}} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

и определите знак разности I_2-I_1 (без помощи таблиц).

4. Найдите $f'(x)$ и критические точки функции

$$f(x)=5x+\ln 2+\log_2 \sin^3 \frac{x}{3} + 3\log_{\frac{1}{2}}\left(\sin\frac{4}{3}x-\sin\frac{2}{3}x\right).$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. К лежащему на горизонтальной поверхности бруску массой $m=12$ кг прикреплена пружина жесткостью $k=300$ Н/м (рис. 1). Коэффициент трения между бруском и поверхностью $\mu=0{,}4$. Вначале пружина не деформирована. Затем, приложив к свободному концу пружины силу $\vec{F}$, направленную под углом $\alpha=30°$ к горизонту, медленно переместили брусок на расстояние $s=0{,}4$ м. Какая работа была при этом совершена?

2. Два маленьких тела с массами $m_1=2$ кг и $m_2=6$ кг соединили нитью и положили на гладкую цилиндрическую поверхность так, как показано на рисунке 2, *а*. Величина угла α неизвестна. Если тела в таком положении отпустить, они начинают двигаться с ускорением $a=6$ м/с^2. С каким ускорением будут двигаться тела, если их расположить на цилиндрической поверхности симметрично (рис. 2, *б*)?

3. Конденсаторы, имеющие емкости $C_1=20$ мкФ и $C_2=60$ мкФ, зарядили до некоторых напряжений U_1 и U_2 соответственно. Затем отрицательно заряженные обкладки конденсаторов соединили проводником, сопротивление которого можно считать пренебрежимо малым, а положительные обкладки соединили через резистор сопротивлением $R=80$ Ом (рис. 3). В момент замыкания ключа K по резистору течет ток $I=0{,}2$ А. Какое количество теплоты выделится в резисторе к моменту, когда ток в цепи практически прекратится?

4. Пучок протонов влетает в область однородного магнитного поля с индукцией $B=0{,}1$ Тл. Направление поля перпендикулярно скорости пучка. В этом поле протоны движутся по дуге окружности радиусом $r=0{,}2$ м и попадают на заземленную мишень. Найдите тепловую мощность, выделяющуюся в мишени. Ток в пучке $I=0{,}1$ мА. Удельный заряд протона (отношение заряда к массе) $e/m=10^8$ Кл/кг.

5. По двум параллельным металлическим рейкам, находящимся в горизонтальной плоскости на расстоянии $l=1$ м друг от друга, мо-

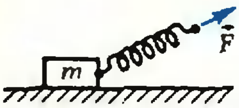


Рис. 1.

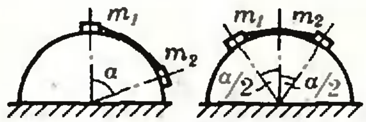


Рис. 2, а и б.

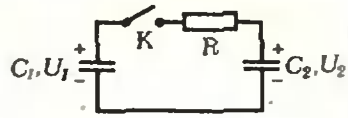


Рис. 3.

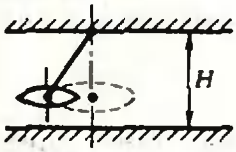


Рис. 4.

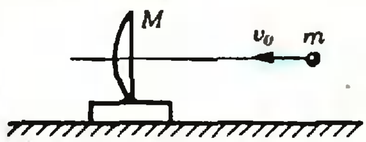


Рис. 5.

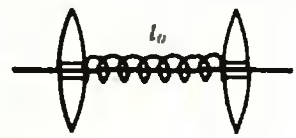


Рис. 6.

жет двигаться без трения проводящий однородный стержень. Длина стержня равна расстоянию между рейками, а его масса $m=10$ г. Концы стержня плотно прилегают к рейкам, обеспечивая хороший электрический контакт. Рейки соединены друг с другом через конденсатор емкостью $C=100$ мкФ. Вся система находится в однородном магнитном поле, вектор индукции которого направлен вертикально, а модуль его $B=10$ Тл. Определите заряд, возникающий на конденсаторе спустя $\tau=1$ с после начала действия на стержень внешней силы, которая приложена к середине стержня, направлена параллельно рейкам и по модулю равна $F=0{,}04$ Н. Начальная скорость стержня равна нулю. Сопротивлением реек и подводящих проводов можно пренебречь.

6. Тонкая линза с фокусным расстоянием $F=0{,}63$ м подвешена на нити к потолку и равномерно движется по окружности, причем оптическая ось линзы все время остается вертикальной (рис. 4). При какой угловой скорости вращения изображение точки подвеса будет находиться на полу? Высота комнаты $H=3$ м. Как зависит число возможных решений от длины нити?

7. Шарик массой $m=50$ г движется со скоростью $v_0=5$ м/с вдоль оптической оси собирающей линзы, установленной на подставке на гладкой поверхности (рис. 5). Масса линзы с подставкой $M=0{,}2$ кг, фокусное расстояние линзы $F=10$ см. После упругого удара шарик отскакивает от линзы. Определите длительность промежутка времени, в течение которого будет существовать мнимое изображение шарика. Силу тяжести при движении считать пренебрежимо малой.

8. Две одинаковые линзы соединены пружиной и могут свободно перемещаться по гладкому горизонтальному стержню (рис. 6). Масса линзы $m=200$ г, ее фокусное расстояние $F=16$ см. Длина недеформированной пружины $l_0=25$ см, ее жесткость $k=15$ Н/м, массу пружины следует считать пренебрежимо малой. В начальный момент пружина не деформирована, одна из линз покоится, а другой сообщают некоторую скорость. Какому условию должна удовлетворять эта скорость, чтобы в момент наибольшей деформации пружины изображение одной линзы в другой стало мнимым?

Публикацию подготовили
Д. Калиниченко, А. Руденко, В. Цикунов

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(математический факультет)

1. Найдите область определения выражения

$$\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{b}{b-\sqrt{ab}}+\frac{a}{\sqrt{ab}+a}\right)-\frac{\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}}{2}$$

и упростите его.

2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{3x+5}{x-3}>2.$$

3. Исследуйте функцию $f(x)=x^3\left(1+\frac{x}{4}\right)$ на экстремумы.

4. Проведены четыре радиуса OA, OB, OC и OK окружности с центром O. Докажите, что если $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OK}=\vec{0}$, то $ABCK$ — прямоугольник.

5. В цилиндр вписана прямая призма, основанием которой служит равнобедренный треугольник с тупым углом, равным α. Найдите объем цилиндра, если известно, что боковая сторона основания призмы равна b, а диагональ большей боковой грани равна l.

Вариант 2
(физический факультет)

1. Докажите тождество

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}=\operatorname{tg}\alpha.$$

2. Решите уравнение

$$2^{x^2-3}\cdot 5^{x^2-3}=0{,}01\cdot(10^{x-1})^3.$$

3. Найдите область определения функции

$$f(x)=\log_{2x-5}(x^2-3x-10).$$

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-(x^2-5x+4)$ и $y=0$. Сделайте рисунок.

5. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды длиной m наклонено к плоскости основания под углом α. Найдите объем пирамиды.

Задачи устного экзамена

1. Определите знак выражения $\log_{\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} 1)$.

2. Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt{9-x^2}+\lg(x-1)-\sqrt{x}$.

3. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. Решите уравнение

а) $6\cdot 9^{0,5x-2}+2\cdot 3^{x-6}=56$

б) $f'(x)=g'(x)$, если $f(x)=3+2x^2$, $g(x)=3x^2-(5x-3)(2-x)$.

5. Решите неравенство

а) $|x^2-4x|>1$

б) $3^{|x|+2}<27$.

6. Напишите уравнение касательной к параболе $y=x^2-4$ в точке пересечения ее с осью ординат.

7. На кривой $y=4x^2-6x+3$ найдите точку, в которой касательная параллельна прямой $y=2x$.

8. Найдите первообразную функции $y=\dfrac{2}{\sin^2 3x}$, график которой проходит через точку с координатами $\left(\frac{\pi}{12}; 1\right)$.

9. В круг вписаны две трапеции с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что диагонали этих трапеций конгруэнтны.

10. Найдите радиус сектора, если его площадь равна 144 см^2, а дуга содержит $\frac{4}{9}$ радиана.

11. Дан треугольник ABC и точка M на стороне AB. Прямая, проведенная через точку M параллельно медиане CC_1, пересекает (CA) в точке P, а (CB) — в точке O. Докажите, что $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{CC_1}$.

12. Докажите, что в любом четырехугольнике $ABCK$ имеет место соотношение $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{BC})$, где M и P — середины отрезков AB и CK соответственно.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Автомобилист и велосипедист движутся навстречу друг другу со скоростями $v_1=20$ м/с и $v_2=5$ м/с соответственно. В начальный момент расстояние между ними $l_0=250$ м. Каким станет это расстояние через $t=5$ с? Задачу решите аналитически и графически.

2. На какой глубине в пресной воде давление в $n=3$ раза больше нормального атмосферного давления?

3. Найдите плотность воздуха при температуре $t=127$°С и давлении $p=900$ гПа.

4. Свинцовая дробинка, летящая со скоростью $v=100$ м/с, попала в доску и застряла в ней. На сколько градусов изменилась температура дробинки, если 50% выделенного при ударе количества теплоты пошло на ее нагревание? Удельная теплоемкость свинца $c=130$ Дж/(кг·К).

5. Генератор тока, имеющий ЭДС $\mathscr{E}=250$ В и внутреннее сопротивление $r=0{,}4$ Ом, питает $n=10$ ламп сопротивлением $R_1=240$ Ом каждая и $k=5$ ламп сопротивлением $R_2=145$ Ом каждая. Лампы соединены параллельно. Сопротивление подводящих проводов $R_{\text{пр}}=2{,}5$ Ом. Найдите напряжение на лампах. Изменится ли ответ (и как), если взять другой источник тока?

6. Сколько электроэнергии затрачивается для выделения из раствора $ZnSO_4$ $m=306$ г цинка? Напряжение на электродах $U=4$ В. Электрохимический эквивалент цинка $k=0{,}34$ мг/Кл.

7. Электрон движется по окружности в однородном магнитном поле с индукцией $B=4\cdot10^{-3}$ Тл. Найдите период обращения. Заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, его масса $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг.

8. Маятник представляет собой стальной шарик, подвешенный на нити. Масса маятника $m=5$ г, период его колебаний $T=1$ с. Какова длина нити? Когда под шариком поместили магнит, период колебаний уменьшился до $T'=0{,}8$ с. Определите силу притяжения шарика к магниту.

9. Начертите ход луча, который переходит из стекла в воду и падает на границу раздела этих сред под углом $\alpha=60°$. Показатель преломления стекла $n_{\text{ст}}=1{,}8$, воды — $n_{\text{в}}=1{,}33$.

10. На каком расстоянии от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=8$ см надо поместить предмет, чтобы его изображение получилось таким же по величине, как предмет, и действительным? Сделайте чертеж. Изменится ли ответ (и как), если взять линзу с бо́льшим фокусным расстоянием?

Публикацию подготовили
З. Новосельцева, О. Оноприенко

Московский институт химического машиностроения

Математика

Письменный экзамен

Вариант I

1. Докажите тождество

$$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha+\sin 2\alpha=\sqrt{2}\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right).$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\log_x 10+\log_y 10=5\\ \lg x+\lg y=\dfrac{5}{4}.\end{cases}$$

3. Конус расположен так, что его основание совпадает с одним из оснований цилиндра, а вершина лежит в центре другого основания цилиндра. Найдите площадь полной поверхности цилиндра и его объем, если объем конуса равен V, а его образующая составляет с осью цилиндра угол α.

4. Вычислите

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+x-3}}{x^2-4}.$$

5. Постройте график функции $y=2x^3-3x^2+6$.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\frac{1}{2}\cos 2x+\sin x\cdot\sin 2x=\cos x.$$

2. Решите уравнение

$$x^{\frac{\lg x+7}{4}}=10^{\lg x+1}.$$

3. В правильную треугольную пирамиду вписан конус. Сторона основания пирамиды равна a и ее ребра образуют с плоскостью основания угол α. Найдите площадь боковой поверхности и объем конуса.

4. Найдите точки max и min функции

$$y=\frac{x^2+x+3}{x^2+5}.$$

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=1-x^2$, $y=x^2-1$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Тело на веревке поднимают от поверхности земли с ускорением $a=2$ м/с^2 вертикально вверх. Через время $t=5$ с веревка оборвалась. Рассчитайте, сколько времени тело двигалось до земли после того, как оборвалась веревка.

2. Летящая горизонтально со скоростью $v=400$ м/с пуля попадает в брусок и застревает в нем. Какое расстояние пройдет по горизонтальной поверхности этот брусок от толчка пули, если его масса в $n=99$ раз больше массы пули? Начальная скорость бруска равна нулю, а коэффициент трения между бруском и поверхностью $\mu=0{,}1$.

3. Деревянный шарик погрузили в воду на глубину $h=1$ м и отпустили. Как высоко он подскочит над водой (без учета силы трения), если плотность шарика $\varrho_ш=600$ кг/м^3, а плотность воды $\varrho_в=1000$ кг/м^3?

4. Открытую с обеих сторон узкую цилиндрическую трубку длиной $l=80$ см до половины погружают в ртуть. Затем закрывают верхнее отверстие в трубке и вынимают ее из ртути. При этом в трубке остается столбик ртути длиной $l_{рт}=22$ см. Чему равно атмосферное давление?

5. В калориметр налито $m_в=2$ кг воды при температуре $t_в=+6$°C и положен кусок льда массой $m_л=2$ кг, имеющий температуру $t_л=-20$°C. Сколько воды и сколько льда будет в калориметре после установления теплового равновесия? Теплоемкостью калориметра и теплообменом с внешней средой можно пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c_в=4200$ Дж/(кг · К). Удельная теплоемкость льда $c_л=2100$ Дж/(кг · К). Удельная теплота плавления льда $\lambda=330$ кДж/кг.

6. Восемь одинаковых маленьких капель ртути, наэлектризованных до потенциала $\varphi=200$ В каждая, сливаются в одну. Рассчитайте потенциал этой капли. Все капли считайте шариками.

7. Электрон, ускоренный напряжением $U_0=100$ В, влетает в плоский конденсатор вдоль его осевой линии. При каком наименьшем напряжении между пластинами конденсатора электрон не выйдет из конденсатора? Расстояние между пластинами $d=1$ см, длина пластин $L=10$ см.

8. Два шарика имеют одинаковые электрические заряды $q=20$ нКл. Шарики соединяют тонкой проволокой. Какое количество электричества пройдет по проволоке, если шарики металлические, а их радиусы равны $R_1=15$ см и $R_2=5$ см?

9. К источнику тока подключили потребитель сопротивлением R_1. Затем его отключили и подключили другой потребитель сопротивлением R_2. Полезная мощность в обоих случаях оказалась одинаковой. Чему равно внутреннее сопротивление источника тока?

10. Расстояние от освещенного предмета до экрана составляет $L=100$ см. Линза, помещенная между ними, дает четкое изображение предмета при двух положениях, расстояние между которыми равно $l=20$ см. Найдите фокусное расстояние линзы.

Публикацию подготовили
Н. Большаков, Б. Кудрявцев, Р. Нифантьева, А. Першин

Харьковский институт радиоэлектроники

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$2\cos x+\operatorname{ctg} x+2\sin x+1=0.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\sin x>1.$$

3. Векторы $\vec a$ и $\vec b$ взаимно перпендикулярны, а вектор $\vec c$ образует с каждым из них угол в 60°. Зная, что $|\vec a|=3$, $|\vec b|=5$ и $|\vec c|=8$, вычислите скалярное произведение $(3\vec a-2\vec b)\times(\vec b+3\vec c)$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x-2y+2=0$, $x=2$.

5. Решите уравнение

$$\frac{x}{x+1}-2\sqrt{\frac{x+1}{x}}=3.$$

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\frac{1}{\cos x}+1=\sin(\pi-x)-\cos x\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi+x}{2}.$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2-4x}>x-3.$$

3. Тело представляет собой прямой круговой цилиндр с полушарием сверху. При каких линейных размерах это тело будет иметь

наименьшую полную поверхность, если объем его равен V?

4. Найдите все числа a, для каждого из которых

$$\int_0^1 [a+(4-a)x+4a^2x^2]\,dx < \frac{17}{2}a-14.$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \lg\sqrt{(x+y)^2}=1 \\ \lg y-\lg|x|=\lg 2. \end{cases}$$

Задачи устного экзамена

1. Вычислите

а) $0{,}8\cdot(1+9^{\log_3 8})^{\log_{65} 5}$;

б) $\lg\operatorname{tg}3^\circ\cdot\lg\operatorname{tg}6^\circ\cdot\lg\operatorname{tg}9^\circ\cdot\ldots\cdot\lg\operatorname{tg}87^\circ$.

2. Найдите область определения функции

а) $y=\dfrac{\lg x}{\arcsin(x-3)}$;

б) $y=\sqrt{2^x-3^x}$.

3. Вычислите

а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

4. Найдите значение производной f' при $x=a$, если

а) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}$, $a=0$;

б) $f(x)=\sin 4x\cdot\cos 4x$, $a=\dfrac{\pi}{3}$.

5. Под каким углом синусоида $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin 3x$ пересекает ось абсцисс в начале координат?

6. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=x^2\cdot e^{-x}$ в точке $x=1$.

7. Найдите экстремум функции $y=x^2-\ln(1+2x)$.

8. Докажите, что функция $y=2x+\sin x$ возрастает на всей числовой оси.

Физика

Задачи устного экзамена

1. На вершине двух наклонных плоскостей, образующих с горизонтом углы $\alpha=30^\circ$ и $\beta=45^\circ$, укреплен блок (рис. 1). Грузы массой $m_1=1$ кг и $m_2=2$ кг соединены нитью, перекинутой через блок. Определите ускорение, с которым начнут двигаться грузы вдоль наклонных плоскостей, и силу натяжения нити. Коэффициент трения грузов о плоскости $\mu_1=\mu_2=\mu=0{,}1$. Блок и нить считать невесомыми, трение в оси блока не учитывать.

2. Тонкая однородная палочка шарнирно укреплена за верхний конец. Нижняя часть палочки погружена в воду, как показано на рисунке 2. Равновесие достигается, когда палочка расположена наклонно и погружена в воду на половину своей длины. Какова плотность материала, из которого сделана палочка?

3. Резерфорд наблюдал, что при лобовом соударении с ядрами меди α-частиц с энергией $E_0=5$ МэВ последние отлетают назад с энергией $E=3{,}9$ МэВ. Вычислите по этим данным отношение масс ядра меди и α-частицы.

4. Плотность смеси азота и водорода при температуре $t=47^\circ$C и давлении $p=2$ атм равна $\varrho=0{,}3$ г/л. Найдите концентрации молекул азота и водорода в смеси. Универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль · К). Постоянная Больцмана $k=1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К. Молярные массы азота и водорода равны соответственно $\mu_1=28$ г/моль и $\mu_2=2$ г/моль.

5. Однородное магнитное поле, индукция которого $B=10$ мТл, перпендикулярно однородному электрическому полю напряженностью $E=17$ кВ/м. Ион, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U=15$ кВ и влетев в область, занятую полями, со скоростью, перпендикулярной обоим полям, движется равномерно и прямолинейно. Определите отношение q/m для этого иона.

6. Однослойная катушка диаметром $D=5$ см помещена в однородное магнитное поле, параллельное ее оси. Индукция поля равномерно изменяется со скоростью $\Delta B/\Delta t=10^{-2}$ Тл/с. Катушка содержит $n=1000$ витков медной проволоки ($\varrho=1{,}75\cdot10^{-8}$ Ом · м) сечением $S=0{,}2$ мм². а) К концам катушки подключили конденсатор емкостью $C=10$ мкФ. Определите заряд на нем. б) Концы катушки замкнули накоротко. Определите тепловую мощность, выделившуюся в катушке.

7. За какую часть периода точка, совершающая гармоническое колебание, пройдет путь, равный а) половине амплитуды, если в начальный момент она находилась в положении равновесия; б) одной трети амплитуды, если в начальный момент она находилась в крайнем положении?

8. Колебательный контур состоит из дросселя индуктивностью $L=0{,}2$ Гн и конденсатора емкостью $C=10^{-5}$ Ф. Конденсатор зарядили до напряжения $U=2$ В, и он начал разряжаться. Каким будет ток в момент, когда энергия контура окажется распределенной поровну между электрическим и магнитным полями?

9. Антенна телевизора (пункт C на рисунке 3) наряду с волной, идущей непосредственно от передающей станции (пункт A), принимает волну, отраженную от железной

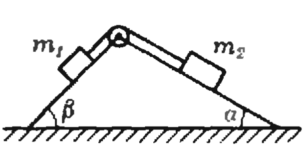


Рис. 1.

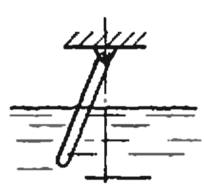


Рис. 2.

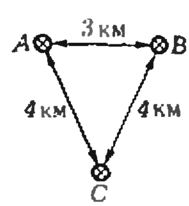


Рис. 3.

крыши здания (пункт B). Вследствие этого изображение двоится. На сколько сантиметров сдвинуты изображения друг относительно друга, если антенна, станция и крыша здания расположены на расстояниях, указанных на рисунке 3. Ширина экрана телевизора $l=50$ см. Указание. Учесть, что изображение в кадре телевизора разлагается на 625 строк и в секунду передается 25 кадров. Временем обратного хода лучей можно пренебречь.

10. Какое количество урана $^{235}_{92}U$ расходуется в сутки на атомной электростанции мощностью $P=5000$ кВт? КПД принять равным $\eta=17\%$. Считать, что при каждом акте распада выделяется энергия $E_0=200$ МэВ. Число Авогадро $N_A=6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$.

Публикацию подготовили
Р. Грудина, Н. Сарнавский

Московский текстильный институт им. А. Н. Косыгина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение

$$A=\frac{\left(\dfrac{\sqrt[4]{bc^3}+\sqrt[4]{a^2bc}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}+\sqrt[4]{bc}\right)^2+bc+3}{\sqrt{bc}+3}.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{8-5x}{2-\log_{\frac{1}{2}}x}>0.$$

3. Решите уравнение

$$-\sin 5x+\cos\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)=2\cos(3x-2\pi).$$

4. Вычислите площадь фигуры, заключенной между линиями $y=8+2x-x^2$ и $2x-y+4=0$.

5. Вычислите тупой угол, образованный медианами, проведенными из вершин острых углов равнобедренного прямоугольного треугольника.

Вариант 2

1. Приведите к виду, удобному для логарифмирования

$$A=\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+4\operatorname{ctg}4\alpha.$$

2. Найдите арифметическую прогрессию, у которой сумма первых трех членов равна 27, а сумма квадратов этих трех членов равна 275.

3. Решите неравенство

$$\frac{1}{3^x+5}<\frac{1}{3^{x+1}-1}.$$

4. Вокруг квадрата, сторона которого равна a, описана окружность, а около окружности описан правильный шестиугольник. Определите площадь шестиугольника.

5. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=e^{-x}$ в точке с абсциссой $x=0$. Найдите угол между этой касательной и осью Ox.

Задачи устного экзамена

1. Решите уравнение

$$x^{\lg x-1}=100.$$

2. Решите неравенство

а) $9x-14-x^2>0$,

б) $\log_{0,5}\dfrac{2-x}{3}<0$.

3. Вычислите

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{6+x}-\sqrt{6-x}}{x}.$$

4. Постройте график функции

а) $y=\left|\log_{\frac{1}{4}}\dfrac{x}{4}\right|$,

б) $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

5. Найдите производную функции

$$y=\log_2(2x^2-3x+1).$$

6. Найдите промежутки монотонности функции

$$y=3+8x+4x^4.$$

7. Вычислите $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\cos 3x\,dx$.

8. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

а) $y=(x-1)^2$, $y=0$, $x=2$, $x=3$

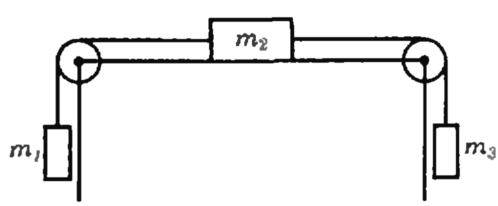
б) $y=2\sin x$, $y=0$, $x=\dfrac{\pi}{4}$.

9. Докажите с помощью векторов, что средняя линия $\triangle ABC$ параллельна третьей стороне и равна ее половине.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Три тела массами $m_1=200$ г, $m_2=300$ г и $m_3=400$ г связаны нитями, перекинутыми через блоки, как показано на рисунке. Коэффициент трения между поверхностью второго тела и опорой $\mu=0{,}2$. Найдите ускорение движения тел и силы натяжения нитей.



2. Из орудия массой $m_1=1000$ кг, движущегося со скоростью $v_1=10$ км/ч, произведен выстрел в направлении движения под углом $\alpha=30°$ к горизонту. Как изменилась при этом скорость движения орудия? Масса снаряда $m_2=5$ кг, а скорость его при вылете $v_2=100$ м/с.

(Окончание см. на с. 56)

Заочная школа программирования

Урок 19: Динамические структуры

Встречаются задачи, в которых удобно иметь структуры данных, более гибкие, чем массивы, записи и файлы. Хотелось бы, например, иметь возможность изменять порядок элементов структуры данных, вставлять в нее новые элементы и выбрасывать элементы, ставшие ненужными. Речь здесь идет о том, чтобы структура могла изменяться *динамически,* в ходе решения задачи (до сих пор мы имели дело в Паскале только со *статическими* структурами, которые определялись раз навсегда в момент написания программы). Динамические структуры не определены специально в языке, как определены, например, массивы, но их можно строить с помощью некоторых языковых средств, о которых мы сейчас расскажем.

Указатели и указуемые переменные

В программах языка Паскаль можно, наряду с уже известными типами, использовать типы указателей. *Тип указателя* задается синтаксической диаграммой.

Таким образом, каждому типу *t*, стандартному или описанному в программе, можно сопоставить тип указателя ↑ *t*. Значением типа ↑ *t* является *указатель* (или, что то же, *ссылка*), указывающий на некоторое значение типа *t*.

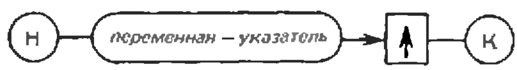
Указатель удобнее всего представлять себе как адрес того места в машинной памяти, в котором находится указываемое им значение.

Подобно тому, как в математике необходимо число 0, обозначающее отсутствие предметов, в программировании необходимо иметь нулевой указатель, который бы ни на что не указывал (или, что то же, указывал на ничто). Таким указателем служит стандартная константа *nil*. Любой тип указателя имеет ее среди своих значений.

Пусть некоторая переменная Р (будем называть ее *переменной-указателем*) имеет тип ↑ *t*. Вызов стандартной процедуры

new (Р)

отведет в памяти место для нового *) значения типа *t* и сделает значением переменной Р указатель на это новое значение, представляемое в программе в виде указуемой переменной. Синтаксическая диаграмма *указуемой переменной* такова:



Теперь мы можем окончательно определить, что такое переменная в языке Паскаль: это либо имя, описанное в разделе описания переменных, либо переменная с индексами, либо выборка поля, либо буферная переменная, либо, наконец, указуемая переменная.

Цепные списки

Применим рассмотренные только что средства языка к простейшей форме динамических структур — *цепному списку*. Список этот есть последовательность записей одного и того же типа *t*; при этом одно из полей в этих записях имеет тип ↑ *t*. Через это поле и происходит сцепление записей в список — каждый элемент содержит в нем указатель на следующий элемент списка. В последней записи списка это поле содержит указатель *nil*.

*) new по-английски — «новый».

Пусть на заводском складе хранятся разнообразные детали, каждая из которых обозначается трехзначным номером. Сведения о запасах деталей могут представляться, например, списком, показанным на рисунке 1 (в данный момент имеются детали лишь трех видов).

При этом предполагается, что обрабатывающая эти сведения программа содержит описание типа

```
деталь = record
           номер: 1..999;
           количество: integer;
           ссылка: ↑ деталь
         end;
```

и описание переменной

```
склад: ↑ деталь;
```

Как на самом деле расположены в памяти элементы списка, программисту неизвестно. Существенно лишь то, как их упорядочивают указатели — значения полей *ссылка* (на рисунке указатели изображены стрелками, ведущими к указываемому объекту). Значение переменной *склад* указывает всегда на первый элемент списка и, начиная с этой переменной, можно прийти к любому его элементу.

Условимся, что в нашем списке детали располагаются всегда в порядке возрастания их номеров. Пусть на склад поступило k штук детали, имеющей номер n (раньше такой детали на складе не было). Надо внести изменения в сведения о состоянии склада, то есть включить новую запись в список (в месте, определяемом номером детали).

Начнем с того, что пополним раздел описаний переменных:

```
новая, перед, после: ↑ деталь;
найдено: boolean;
```

Указатель *новая* указывает на запись о новой детали. Указатели *перед* и *после* скользят по списку до тех пор, пока с их помощью не будет найдено место для включения нового элемента. В этот момент они станут указывать соответственно на элемент, предшествующий точке включения, и элемент, следующий за ней. Логическая переменная *найдено* сообщит о том, что поиск закончен и можно вносить в список новую запись. Особым образом обрабатывается случай, когда новый элемент приходится помещать в самом начале списка.

Операторы, выполняющие наше задание, будут такими:

```
new (новая); новая↑. номер: = n;
новая↑. количество: = k; после: = склад;          (1)
if склад↑. номер > n
  then склад: = новая                              (2)
  else
    begin найдено: = false;
      repeat
        if после = nil
          then найдено: = true
          else if после↑. номер > n
                 then найдено: = true;
        if NOT найдено
          then
            begin
              перед: = после;
              после: = после↑. ссылка
            end
      until найдено;
      перед↑. ссылка: = новая                      (3)
    end;
новая↑. ссылка: = после;                           (4)
```

Пусть требуется пополнить список, изображенный на рисунке 1. После выполнения строчки (1) схема станет такой, как на рисунке 2. Если, например, $n = 100$ (k впредь считаем для определенности равным 13), то выполняется опера-

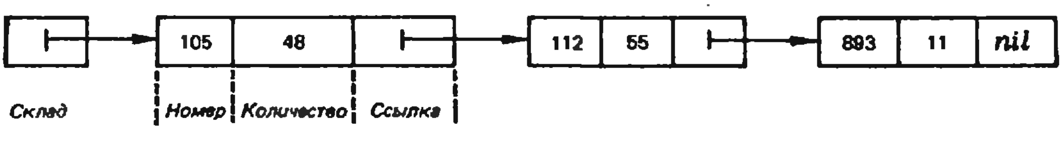


Рис. 1.

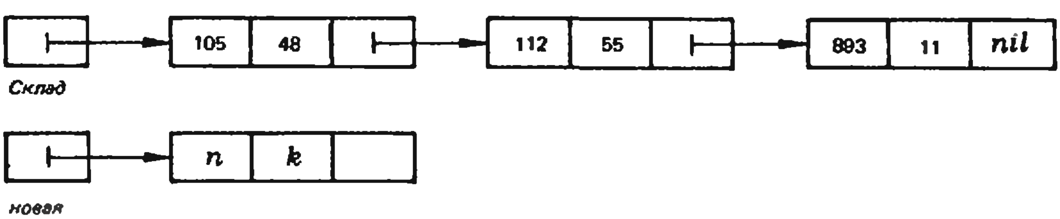


Рис. 2.

тор (2), после чего схема принимает вид, показанный на рисунке 3. Все операторы вплоть до (4) будут пропущены, а оператор (4) приведет к схеме, показанной на рисунке 4.

Пусть теперь n — не 100, а 200. Вместо (2) будут на этот раз работать операторы, стоящие за **else**. После первого выполнения тела цикла переменная *найдено* будет иметь значение *false*, а схема станет такой, как на рисунке 5.

При втором выполнении тела цикла *перед* и *после* сдвинутся на один элемент; в третий же раз *найдено* получит значение *true*, сдвига указателей *перед* и *после* не произойдет, а операторы (3) и (4), проработав, дадут новую схему (см. рис. 6).

Пусть, наконец, $n=900$. В этом случае момент, когда переменная *найдено* получает значение *true*, запечатлен на рисунке 7.

После этого цикл завершится — окончательная схема показана на рисунке 8.

Задание 19.1. *Измените приведенную выше программу так, чтобы она работала и в том случае, когда исходный список пуст (то есть склад еще не начал заполняться).*

Задание 19.2. *Неизвестно, имеются ли на складе детали с номером n. На склад поступило k штук этих деталей. Требуется внести изменения в сведения о состоянии склада.*

Пусть теперь со склада взяты все детали с номером n (известно, что они там были). Внести изменения в сведения о складе можно с помощью следующих операторов:

```
if склад↑. номер = n
  then склад:= склад↑. ссылка
  else
   begin перед:= склад;
    while перед↑. ссылка↑. номер < n
      do перед:= перед↑. ссылка;
    перед↑. ссылка:= перед↑. ссылка↑. ссылка
   end;
```

Если исходное состояние списка представлено на рисунке 8 и $n=893$, то после выполнения наших операторов схема станет такой, как на рисунке 9. Теперь на запись, у которой поле *номер* равно 893, нет ссылки ни от одной переменной. На самом деле, запись эта все еще присутствует в памяти, но совершенно недоступна. Такого «мусора» в памяти машины может оказаться довольно много, и некоторые трансляторы предусматривают возможность «чистки» этого мусора, то есть освобождения памяти для новой информации.

Задание 19.3. *Со склада затребовало k деталей с номером n. Напишите операторы, которые внесут нужные изменения в сведения о складе (то есть либо уменьшат значение поля* **количество** *в соответствующем элементе списка, либо полностью удалят этот элемент). Если заказ не может быть выполнен (совсем или частично), то на печать должно быть выдано сообщение о количестве недостающих деталей.*

Пример более сложной программы

Указатели дают возможность соединять записи не только последовательно, но и более сложным образом. Поэтому в Паскале можно представлять деревья и, как более общий случай, графы (см. статью В. Евстигнеева в «Кванте», 1981, № 3). Соединяемые таким образом записи могут в общем случае иметь различные типы.

Пусть, например, большой коллектив юных программистов изучает заочно современные языки программирования. Учащиеся распределены по разным консультационным пунктам, с которыми они поддерживают переписку. Структура, которую мы собираемся построить, — это прежде всего, список, элементы которого содержат названия городов и организаций, где находятся консультационные пункты. Но, кроме того, с каждым пунктом связан список, состоящий из имен и фамилий учащихся, консультирующихся на этом пункте.

Реализуем структуру, которая выглядит примерно так, как указано на рисунке 10.

В раздел описаний типов надо поместить такие описания:

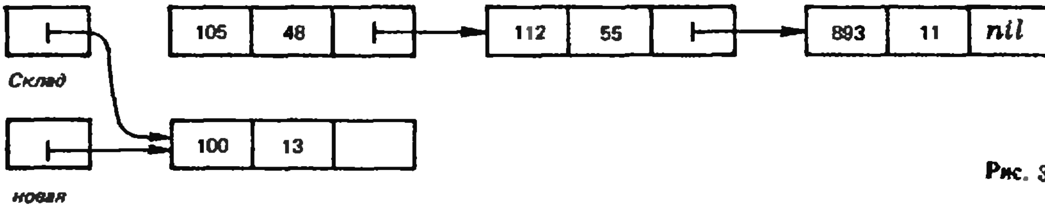


Рис. 3.

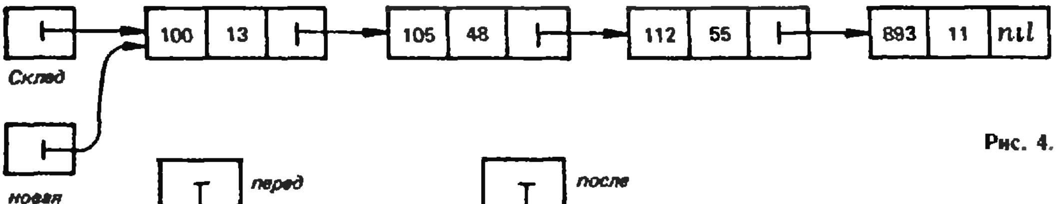


Рис. 4.

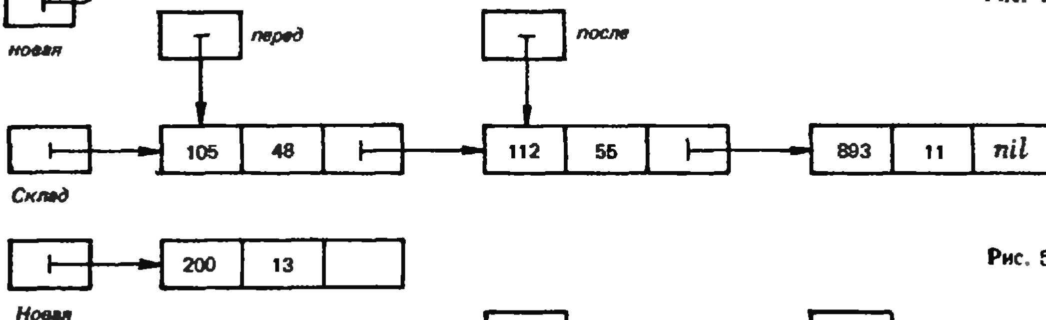


Рис. 5.

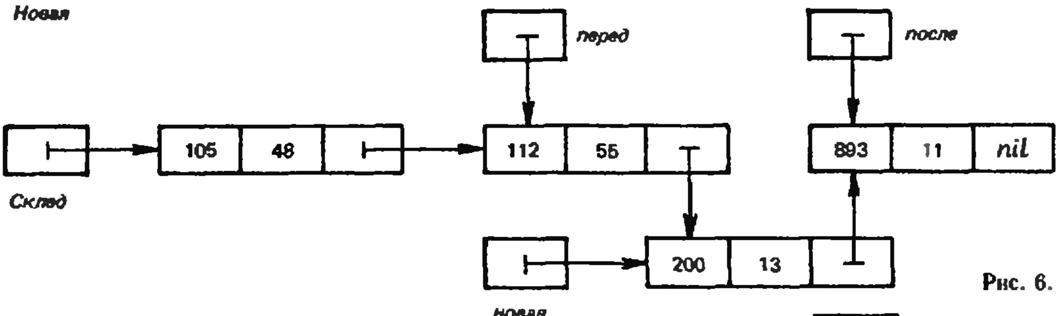


Рис. 6.

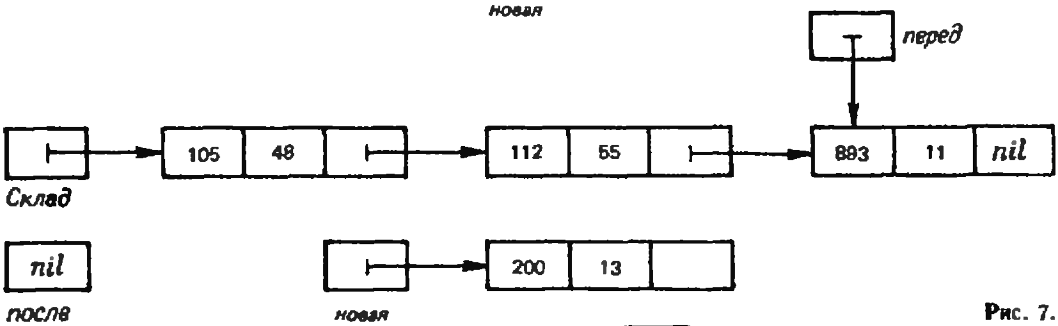


Рис. 7.

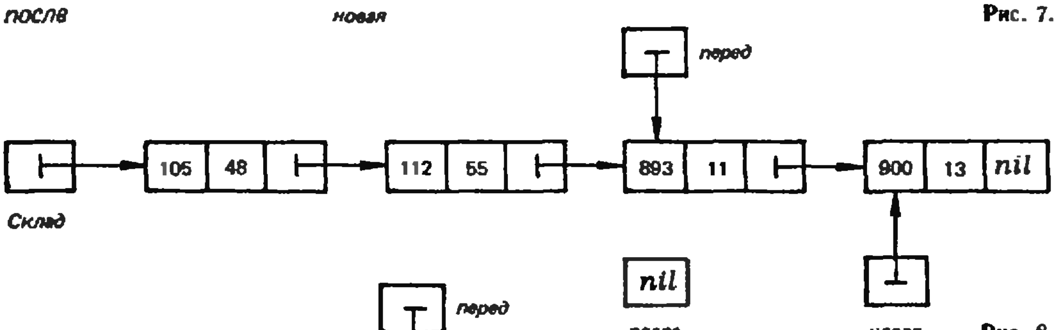


Рис. 8.

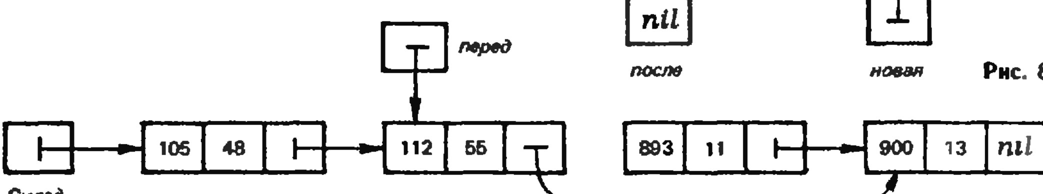


Рис. 9

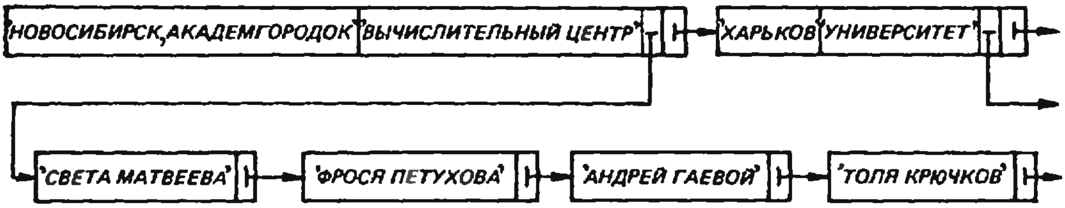


Рис. 10.

```
лицо = record имяфамилия:
          array [1..40] of char;
          следующее: ↑лицо
       end;
пункт = record адрес, организация:
          array [1..30] of char;
          учащиеся: ↑лицо;
          следующий: ↑пункт
        end;
```

В раздел описания переменных поместим теперь описание

структура: ↑ *пункт*;

Мы видим, что в каждой записи типа *пункт* имеются два указателя — типа ↑ *пункт* для связи со следующим пунктом и типа ↑ *лицо* для подсоединения списка лиц, приписанных к этому пункту.

Следующие операторы напечатают имена и фамилии всех учащихся с указанием на консультационный пункт каждого (переменная *пункты* имеет тип ↑ *пункт*, переменная *лица* — тип ↑ *лицо*):

```
пункты: = структура;
while пункты < > nil do
  begin лица: = пункты ↑. учащиеся;
     while лица < > nil do
       begin
         writeln (лица ↑. имяфамилия,
         пункты↑ адрес, пункты↑
         организация);
         лица: = лица ↑. следующее
       end;
     пункты: = пункты ↑. следующий
  end;
```

Задание 19.4. *Напишите программу, определяющую, сколько учащихся должно обращаться за консультациями по адресу, указанному в списке консультационных пунктов первым.*

А. Рар

Московский текстильный институт им. А. Н. Косыгина

(Начало см. на с. 51)

3. На какой высоте над поверхностью Земли сила тяжести тела будет в два раза меньше, чем на поверхности Земли?

4. Тело массой $m=0{,}5$ кг помещено в воду на глубину $h=2$ м. За какое время тело всплывет на поверхность? Плотность вещества тела $\varrho_т=0{,}7$ г/см^3. Плотность воды $\varrho_в=1$ г/см^3.

5. Два одинаковых ледяных метеорита летят навстречу друг другу с равными скоростями и при ударе обращаются в пар. Какова должна быть при этом минимальная скорость метеоритов, если их температура перед столкновением $t=-20°$ С? Удельные теплоемкости льда и воды равны соответственно $c_л=2100$ Дж/(кг · К) и $c_в=4190$ Дж/(кг · К). Удельная теплота парообразования воды $r=23\cdot10^5$ Дж/кг. Удельная теплота плавления льда $\lambda=3{,}35\cdot10^5$ Дж/кг.

6. В закрытом сосуде находится газ под давлением $p=5\cdot10^5$ Па. Какое давление установится в сосуде, если после открытия крана 4/5 массы газа выйдет из сосуда? Процесс можно считать изотермическим.

7. Шары радиусами $r_1=15$ см и $r_2=10$ см заряжены до потенциалов $\varphi_1=20$ кВ и $\varphi_2=40$ кВ соответственно. Каким станет потенциал после соприкосновения шаров? Какой заряд перейдет с одного шара на другой? Рассмотрите случай, когда шары заряжены одноименно.

8. К клеммам источника тока с внутренним сопротивлением $r=10$ Ом подключены два параллельно соединенных проводника, сопротивления которых $R_1=10$ Ом и $R_2=2$ Ом. Определите отношение токов, протекавших через первый проводник до и после обрыва в цепи второго проводника.

9. На столе лежит лист бумаги. Луч света, падающий на бумагу под углом $\alpha=45°$, дает на ней светлое пятно. На сколько сместится это пятно, если на бумагу положить стеклянную пластину толщиной $d=2$ см? Показатель преломления стекла $n=1{,}5$.

10. На каком расстоянии перед рассеивающей линзой с оптической силой $D=-2$ дптр надо поставить предмет, чтобы его мнимое изображение получилось на середине расстояния между линзой и ее мнимым фокусом?

Публикацию подготовили
М. Борис, И. Турчин

Красноярская летняя школа

Каждый год первого августа на берегу Енисея в пионерском лагере «Таежный» появляются необычные вожатые — к старшеклассникам, интересующимся математикой и физикой, химией и биологией, приезжают студенты и сотрудники Красноярского университета. Торжественной присягой сотрудников и научной лекцией открывается в этот день Красноярская краевая летняя школа по естественным наукам (КЛШ). Школьники ждут от КЛШ новых знаний и интересного общения. И эти ожидания оправдываются. Но главное в КЛШ — соединение образования и общения. По мнению первого директора школы В. О. Бытева, общение должно быть умным, учеба должна быть общительной. Последовательное проведение этого принципа обеспечивает летней школе то, что ученики называют разумной атмосферой. Она немыслима без большого труда — ежедневных занятий по 5—6 уроков. Прежде всего это лекции и семинары учебных курсов по разнообразной тематике, например «Как решать задачу?» Ш. А. Даутова (по книгам Д. Пойа), «Введение в теорию чисел» М. А. Шубина, «Термодинамика» А. М. Баранова. Кроме того, каждый сотрудник летней школы готовит цикл факультативных занятий. Школьники могут выбирать два факультатива из многих предложенных. В КЛШ-80 особой популярностью пользовались факультативы «Планиметрия Лобачевского», «Цепные дроби», «Субатомная физика», «Введение в биофизику», в КЛШ-81 — «Движение заряженных частиц в электромагнитном поле», «Логические основы цифровой электроники», «Комбинаторика и вероятность», «Биофизика», «Астрономические наблюдения». КЛШ сотрудничает со Всесоюзной летней школой юных программистов, и самый большой успех выпал факультативу «Уроки современного программирования» под руководством представителя Новосибирска Г. А. Звенигородского. По итогам факультативов в школе прошла научная конференция.

Лекции Бориса Владимировича Гнеденко вызывали такой интерес, что обсуждение затронутых вопросов продолжалось на прогулках.

На «огневом рубеже» научно-спортивного биатлона. Кто раньше всех сдаст решение судье?

Ребята, приезжающие в КЛШ из всех районов громадного Красноярского края, могут услышать из первых уст о современной науке. Удивительными назвали ученики КЛШ встречи с членом-корреспондентом АН СССР К. С. Александровым и профессором Л. А. Айзенбергом (Институт физики СО АН СССР), В. Л. Гутенмахером и А. П. Савиным, представлявшими «Квант». И, конечно, событием для сотрудников и учеников КЛШ-81 стали встречи с академиком АН УССР Б. В. Гнеденко. В блестящем цикле лекций Борис Владимирович рассказал школьникам не только о задачах теории надежности и теории массового обслуживания, но и о математическом творчестве, о том, как решение практической задачи приводит к новой математической теории.

Обильную пищу для размышлений ученики КЛШ получают на конкурсах по решению задач, олимпиадах, физико-математическом турнире.

Каждый сотрудник КЛШ выполняет одновременно определенные учебные и воспитательные обязанности. Например, В. Петунин ведет не только семинары по методу координат, но и занятия по физкультуре, В. Костюк читает факультатив «Современные ЭВМ» и одновременно является завхозом школы, все вожатые комсомольских групп руководят семинарами по различным курсам. Спорт ребята любят — помимо спартакиады в КЛШ проводятся научно-спортивные соревнования под девизом «Решай задачу по плечу, бей головою по мячу!». В обширной культурной программе КЛШ вечера поэзии, музыки, танцев, беседы о литературе и искусстве. Незабываемы заключительные праздники школы — дни математика, физика, биолога и химика. В эти дни проходят заключительные собеседования по учебным курсам, физический КВН и математический хоккей, манифестация «Науку вперед!», викторина эрудитов, вечер математической драматургии, биолого-химическая дискотека, пресс-конференция с преподавателями.

Заключительные анкеты школьников показывают, что за три недели работы КЛШ почти у всех учеников вырастает интерес к самостоятельной учебе, естественным наукам. Это — главный результат работы школы.

И. Фрумин

Задачи наших читателей

1. Докажите, что если $1 \leq x \leq 5$, то уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет решений в натуральных числах.

В. Пуниев

2. Разложите на множители многочлен $x^8 + 4x^2 + 4$.

Э. Туркевич

3. Пусть $S(n)$ — сумма цифр в двоичной записи натурального числа n. Докажите, что среди пар $(m; n)$ различных натуральных чисел m и n найдется бесконечное множество таких, что $\frac{m}{S(m)} = \frac{n}{S(n)}$. Решите аналогичную задачу для десятичной системы.

Л. Ханин

4. В треугольнике сумма квадратов длин сторон равна m^2, а сумма их четвертых степеней равна n^4. Найдите площадь этого треугольника.

Н. Трифонов

5. а) Докажите, что для каждого $n \geq 3$ на плоскости существует n окружностей с различными центрами такие, что любой отрезок, соединяющий центры двух окружностей, пересекают хотя бы одну окружность с другим центром.

б) Докажите, что существует такое m, что на плоскости нельзя расположить m окружностей так, чтобы лю- центры двух окружностей, пересекался с остальными $m-2$ окружностями.

в) Попробуйте найти наименьшее такое m. (Решение автору неизвестно.)

А. Балинский

6. а) Вместо переменных a, b, c, d, e, f, g, h (рис. 1) расставьте первые восемь натуральных чисел так, чтобы сумма потоков, в т е к а ю щ и х в каждый из пяти узлов (на рисунке 1 узлы отмечены красным цветом), была равна сумме в ы т е к а ю щ и х потоков. Сколько решений имеет задача?

б) Докажите, что подобная расстановка чисел 1, 2, ..., 8 для рисунка 2 невозможна.

М. Штеренберг

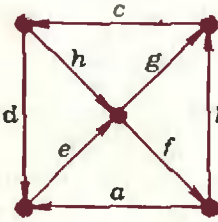


Рис. 1.

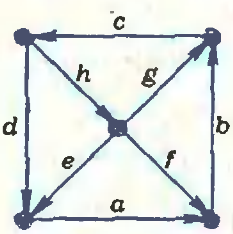


Рис. 2.

7. Тонкое проволочное кольцо вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр кольца и лежащей в его плоскости (рис. 3). Масса кольца m, его радиус r. Определите кинетическую энергию кольца.

Е. Лифшиц

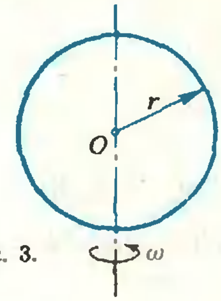


Рис. 3.

8.** Пусть $p \neq 2$ — простое число. Рассмотрим все натуральные числа, меньшие p. Обозначим через $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_{p-2}$ суммы произведений, составленных из этих чисел, взятых по одному, по два, по три и т. д., то есть

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + (p-1),$$
$$S_2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \ldots + (p-2) \cdot (p-1),$$
$$S_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + \ldots + (p-3) \cdot (p-2) \cdot (p-1).$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_{p-2} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-2) + 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-2) \times (p-1) + \ldots + 2 \cdot 3 \cdot \ldots \times (p-2) \cdot (p-1).$$

а) Докажите, что все эти суммы делятся на p. У к а з а н и е. Воспользуйтесь таким у т в е р ж д е н и е м: *если многочлен с целыми коэффициентами степени меньше p делится на p во всех целых точках, то все его коэффициенты делятся на p.*

б) Докажите, что суммы $S_3, S_5, S_7, \ldots, S_{p-2}$ делятся на p^2.

Эта задача — для тех, кто умеет обращаться с *биномиальными коэффициентами* (см., например, статью Н. В а с и л ь е в а и А. З е л е в и н с к о г о в № 1).

И. Вайнштейн

Редакция журнала «Квант» с глубоким прискорбием извещает читателей о безвременной кончине члена редакционного совета, выдающегося советского ученого и организатора науки, вице-президента АН УССР директора Института кибернетики академика Виктора Михайловича Глушкова, последовавшей 30 января 1982 г.

Фотоны

1. $n = \frac{P\lambda d^2}{16l^2hc} \approx 1{,}5\cdot 10^{12}$ с$^{-1}$.

2. $\varphi_{max} = \frac{hc}{\lambda e} - \frac{A}{e} \approx 1{,}74$ В.

3. $F = \frac{E}{c\tau} \approx 6{,}7\cdot 10^{-6}$ Н.

4. Из законов сохранения энергии и импульса найдем

$$\nu = \frac{Mc(c-v)}{h}\left(-1+\sqrt{1+\frac{2h\nu_0}{M(c-v)^2}}\right).$$

Учитывая, что $v \ll c$ и что энергия фотона $h\nu_0$ много меньше энергии покоя атома Mc^2, воспользуемся указанным в условии приближением и получим

$$\nu \approx \frac{\nu_0 c}{c-v} \approx \frac{\nu_0}{1-v/c} \approx \nu_0\left(1+\frac{v}{c}\right).$$

Московский инженерно-физический институт

Математика

Вариант 1

1. $\frac{155-p-\sqrt{p^2+30p+2025}}{2}$. Указание. Если процент содержания меди во втором сплаве обозначить через x, то кусок второго сплава, содержащий 12 кг меди, весит $\frac{1200}{x}$ кг. Замечание. Дополнительное исследование показывает, что, сплавляя кусок первого сплава, содержащий 6 кг меди, с куском второго сплава, содержащим 12 кг меди, получить слиток, содержащий p % меди, можно только при $p \in \left]0;\ 64\frac{12}{17}\right[$.

2. $\frac{\sqrt6}{128}\, l^3\cos^3\alpha$ при $\alpha\in\left[\operatorname{arctg}\frac{\sqrt2}{8};\ \frac{\pi}{2}\right[$, $\frac{\sqrt3}{16}\, l^3 \sin\alpha\cdot\cos^2\alpha$ при $\alpha \in \left]0;\ \operatorname{arctg}\frac{\sqrt2}{8}\right[$.
Указание. Пусть сначала S_1 — произвольная точка на луче $[OS)$ и $|S_1O|=x$. Таким образом, $x\geqslant 0$. Функция $P(x)=|S_1S|+|S_1A_1|+|S_1B_1|+|S_1C_1|$ убывает на $\left[0;\ \frac{l\cdot\cos\alpha}{4\sqrt2}\right]$ и возрастает на $\left[\frac{l\cdot\cos\alpha}{4\sqrt2};\ +\infty\right[$; $x=\frac{l\cdot\cos\alpha}{4\sqrt2}$ — ее точка минимума. Соответствующая этому числу точка S_1 лежит на высоте $[SO]$ тогда и только тогда, когда $\alpha\in\left[\operatorname{arctg}\frac{\sqrt2}{8};\ \frac{\pi}{2}\right[$. Если же $\alpha\in\left]0;\ \operatorname{arctg}\frac{\sqrt2}{8}\right[$, функция $P(x)$ принимает наименьшее значение на точках отрезка $[SO]$ при $S_1=S$.

3. $\left[e^{-\frac{1}{\sqrt2}};\ 1\right[\cup \left[e^{\frac{1}{\sqrt2}};\ +\infty\right[$. Указание. Чтобы функция $\frac{1}{x+a}$ была непрерывна на отрезке с концами $-1-a$, $-2a$, точка $-a$ не должна ему принадлежать.

4. $f'(x)=2\cos 2x\sqrt{\sin 2x}+\cos 4x+1$;
$x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{2}-\frac12\arcsin\frac{\sqrt5-1}{2}+\pi l$ $(k,\ l\in \mathbf{Z})$.

Вариант 2

1. $\frac{24+s-\sqrt{s^2+288}}{2}$ км и $\frac{24-s-\sqrt{s^2+288}}{2}$ км.
Указание. Поскольку, по условию, во второй части пути каждый из пешеходов затрачивал на километр на 10 мин меньше, чем в первой части пути, скорость каждого из них в первой части пути не превосходила 6 км/ч. Замечание. Дополнительное исследование показывает, что найденные выражения путей положительны при $s<6$.

2. $\frac{3\sqrt3}{2}\cdot\frac{H^2(l^2-H^2)}{(\sqrt{3(l^2-H^2)}-2H)^2}$. Указание. Полная поверхность описанной в условии призмы, верхнее основание которой находится на расстоянии x от вершины конуса, равна

$$\frac{3\sqrt{l^2-H^2}}{H^2}Bx^2+6\sqrt{l^2-H^2}\,x,$$

где $B=\sqrt{3(l^2-H^2)}-2H$. Данный квадратный трехчлен тогда и только тогда имеет наибольшее значение на интервале $]0;\ H[$, когда одновременно $B<0$ и вершина параболы принадлежит этому интервалу (рис. 1), что равносильно неравенствам $1<\frac{l}{H}<\frac{2}{\sqrt3}$.

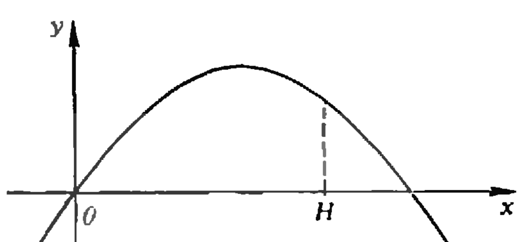


Рис. 1.

3. $I_1=\frac12\ln 2$, $I_2=\frac{6}{13}$, $I_2-I_1>0$. Указание. $e^{12}>(2{,}5)^{12}=(6{,}25)^6>6^6=46\,656>8192=2^{13}$.

4. $f'(x)=5+\frac{3}{\ln 2}\operatorname{tg}x$; $x=2\pi-\operatorname{arctg}\frac{5\ln 2}{3}+6\pi k$ $(k\in \mathbf{Z})$.

Физика

1. Совершенная работа A складывается из работы A_1, затраченной на растяжение пружины, и работы A_2, затраченной на перемещение

бруска. Работа A_1, с учетом закона Гука, равна

$$A_1=\frac{kx^2}{2}=\frac{k(F/k)^2}{2}=\frac{F^2}{2k},$$

а работа A_2 определяется выражением

$$A_2=Fs\cos\alpha.$$

Величина силы F зависит, вообще говоря, от того, как двигался брусок. Будем считать, что движение происходило с постоянной скоростью. (Очевидно, что на начальном этапе, когда скорость бруска увеличивалась от нуля до некоторого установившегося значения, наше допущение несправедливо. Однако, так как установившаяся скорость мала, этот этап длился очень недолго, и его вклад в работу не существен.)

Согласно второму закону Ньютона, сумма всех действующих на брусок сил (силы $\vec{F}$, силы тяжести $m\vec{g}$, силы нормальной реакции опоры $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{тр}$) при равномерном движении равна нулю:

$$\vec{F}+m\vec{g}+\vec{N}+\vec{F}_{тр}=0,$$

или, в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси координат (сделайте соответствующий рисунок),

$$F\cos\alpha-F_{тр}=0,$$
$$N+F\sin\alpha-mg=0,$$

где $F_{тр}=\mu N$.

Отсюда найдем

$$F=\frac{\mu mg}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}.$$

Окончательно

$$A=A_1+A_2=\frac{F^2}{2k}+Fs\cos\alpha=$$
$$=\frac{(\mu mg)^2}{2k(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)^2}+\frac{\mu mgs}{1+\mu\operatorname{tg}\alpha}\approx 19\ Дж.$$

2. В первом случае ускорение первого тела обеспечивается силой натяжения нити, а ускорение второго тела — разностью проекции его силы тяжести на направление касательной к цилиндрической поверхности и силы натяжения нити:

$$m_1a=F_н,$$
$$m_2a=m_2g\sin\alpha-F_н.$$

Отсюда можно найти $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha=\frac{(m_1+m_2)a}{m_2g}.$$

Во втором случае, согласно второму закону Ньютона,

$$m_1a'=F'_н-m_1g\sin\alpha/2,$$
$$m_2a'=m_2g\sin\alpha/2-F'_н,$$

откуда новое ускорение тел

$$a'=\frac{(m_2-m_1)g\sin\alpha/2}{m_1+m_2}.$$

Значение $\sin\alpha/2$ можно найти из известной тригонометрической формулы $2\sin^2\alpha/2=1-\cos\alpha$:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)^{1/2}=\left(\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{2}\right)^{1/2}.$$

В результате получим

$$a'=g\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\left(\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{2}\right)^{1/2}\approx 2{,}2\ м/с^2.$$

3. После прекращения тока в цепи напряжение на обоих конденсаторах будет одним и тем же (обозначим его через U). Его можно связать с начальными напряжениями U_1 и U_2 с помощью закона сохранения заряда:

$$C_1U_1+C_2U_2=(C_1+C_2)U,$$

и

$$U=\frac{C_1U_1+C_2U_2}{C_1+C_2}.$$

Согласно закону сохранения энергии, количество теплоты, выделившееся в резисторе, равно разности начальной и конечной энергий заряженных конденсаторов:

$$Q=\frac{C_1U_1^2}{2}+\frac{C_2U_2^2}{2}-\frac{(C_1+C_2)U^2}{2}=$$
$$=\frac{C_1C_2(U_1-U_2)^2}{2(C_1+C_2)}.$$

Заметим, что разность напряжений U_1-U_2 в момент замыкания ключа равна напряжению между положительными обкладками первого и второго конденсаторов. Тогда по закону Ома для участка цепи

$$U_1-U_2=IR.$$

Окончательно

$$Q=\frac{C_1C_2(IR)^2}{2(C_1+C_2)}\approx 1{,}9\cdot 10^{-3}\ Дж.$$

4. Попав на заземленную мишень, каждый протон тормозится и отдает мишени свою кинетическую энергию $mv^2/2$. В единицу времени к мишени подлетает $N=I/e$ протонов. Следовательно, тепловая мощность

$$P=\frac{mv^2}{2}N=\frac{mv^2}{2}\frac{I}{e}.$$

Скорость протонов v можно найти с помощью второго закона Ньютона:

$$\frac{mv^2}{r}=evB,$$

и

$$v=\frac{eBr}{m}.$$

Таким образом,

$$P=\frac{mv^2}{2}\frac{I}{e}=\frac{B^2Ir^2}{2}\frac{e}{m}=2\ Вт.$$

5. При движении стержня в магнитном поле на его концах возникает напряжение $U=Blv$ (v — скорость стержня в данный момент времени). В результате по стержню и рейкам течет индукционный ток I, который заряжает конденсатор. Приращение заряда на конденсаторе за время Δt, с одной стороны, равно $\Delta q=I\Delta t$; с другой стороны, $\Delta q=C\Delta U=CBl\Delta v$. Отсюда получаем формулу, связывающую величину тока I с ускорением a движения стержня:

$$I=CBl\Delta v/\Delta t=CBla.$$

Ускорение найдем с помощью второго закона Ньютона. Кроме внешней силы $\vec{F}$, на стержень действует еще сила $\vec{F}_м$ со стороны магнитного поля. Она направлена противоположно силе $\vec{F}$ и по модулю равна $F_м=BIl=CB^2l^2a$. Таким образом,

$$ma=F-CB^2l^2a,$$

откуда

$$a = \frac{F}{m+CB^2l^2}.$$

За время τ на конденсаторе накопится заряд

$$q = I\tau = \frac{CBlF\tau}{m+CB^2l^2} = 2\cdot10^{-3}\ \text{Кл}.$$

6. Обозначим через h расстояние от потолка (предмета) до линзы. Тогда расстояние от линзы до пола (до изображения) будет равно $H-h$. По формуле линзы

$$\frac{1}{h}+\frac{1}{H-h}=\frac{1}{F},$$

откуда

$$h=\frac{H}{2}\pm\sqrt{\frac{H^2}{4}-HF}.$$

Подставив числовые данные, получим два значения h:

$$h_1=2{,}1\ \text{м и}\ h_2=0{,}9\ \text{м}.$$

Если длина нити $l \geqslant h_1=2{,}1$ м, возможны оба случая. Если $h_1>l\geqslant h_2$, существует только одно решение, соответствующее высоте $h_2=0{,}9$ м. Если же длина нити $l<h_2$, решений нет вообще.

Теперь свяжем найденное расстояние h с угловой скоростью ω вращения линзы. Согласно второму закону Ньютона,

$$m\omega^2 r = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

где m — масса линзы, r — радиус окружности, по которой она движется, α — угол, образуемый нитью с вертикалью. Легко видеть, что $r=h\,\mathrm{tg}\,\alpha$; следовательно,

$$\omega^2=g/h,\ \text{и}\ \omega=\sqrt{g/h}.$$

С учетом найденных значений h_1 и h_2, получим

$$\omega_1=\sqrt{g/h_1}\approx2{,}2\ \text{с}^{-1}\ \text{и}\ \omega_2=\sqrt{g/h_2}\approx3{,}3\ \text{с}^{-1}.$$

7. Обозначим через v_1 и v_2 модули скоростей шарика и линзы после удара.

Мнимое изображение шарика в линзе будет существовать в течение промежутка времени t, для которого расстояние между шариком и линзой не больше фокусного. Он складывается из двух промежутков. Первый соответствует движению шарика до удара о линзу и равен $t_1=F/v_0$. Второй начинается в момент удара и заканчивается в момент, когда шарик и линза, двигаясь в противоположные стороны, разойдутся на расстояние F. Его длительность $t_2=F/(v_1+v_2)$.

Для определения скоростей v_1 и v_2 воспользуемся законами сохранения энергии и импульса:

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{Mv_2^2}{2},$$

$$mv_0=-mv_1+Mv_2.$$

Запишем эти равенства несколько по-другому:

$$m(v_0^2-v_1^2)=Mv_2^2,$$

$$m(v_0+v_1)=Mv_2.$$

Поделив первое на второе, получим

$$v_0-v_1=v_2,\ \text{или}\ v_1+v_2=v_0.$$

Тогда окончательно

$$t=t_1+t_2=\frac{F}{v_0}+\frac{F}{v_1+v_2}=\frac{F}{v_0}+\frac{F}{v_0}=2\frac{F}{v_0}=0{,}04\ \text{с}.$$

8. Изображение одной линзы в другой мнимое, если расстояние между линзами не больше фокусного расстояния. Это означает, что в момент наибольшей деформации пружины ее длина $l\leqslant F$. Поскольку по условию задачи $F<l_0$, пружина должна сжиматься. Для этого начальная скорость $\vec v_0$ одной из линз должна быть направлена навстречу другой — вот первое условие. Чтобы найти модуль этой скорости, воспользуемся законами сохранения энергии и импульса. Очевидно, что сжатие пружины будет максимальным в тот момент, когда скорости обеих линз одинаковы и по модулю, и по направлению. Обозначим эту скорость через v и запишем законы сохранения:

$$mv_0=2mv,$$

$$\frac{mv_0^2}{2}=2\frac{mv^2}{2}+\frac{k(l_0-l)^2}{2}.$$

Отсюда, учитывая, что $l\leqslant F$, получим

$$v_0\geqslant(l_0-F)\sqrt{\frac{2k}{m}}\approx1{,}1\ \text{м/с}.$$

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Область определения: $a>0$, $b>0$, $a\neq b$. Выражение равно 0 при $a>b$ и $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ при $a<b$.

2. $\left[-3\frac{2}{9};\ -1\frac{2}{3}\right[$.

3. Единственная точка экстремума — точка минимума $x=-3$.

4. Доказательство. Поскольку $\vec{OA}+\vec{OB}=-(\vec{OC}+\vec{OK})$, вектор $\vec{OE}=\vec{OA}+\vec{OB}$ противоположен вектору $\vec{OF}=\vec{OC}+\vec{OK}$. Значит, $\widehat{EOF}=180°$ (рис. 2). $OAEB$ — ромб ($|OA|=|OB|$). Следовательно, $[AB]\perp[OE]$. Аналогично $[CK]\perp[OF]$. Таким образом, $[AB]\parallel[CK]$. Так же доказывается $[BC]\parallel[AK]$. Итак, $ABCK$ — параллелограмм. Но параллелограмм, вписанный в окружность, — прямоугольник.

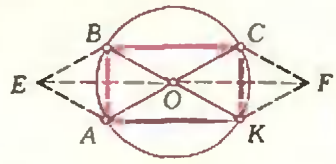


Рис. 2.

5. $\dfrac{\pi b^2}{4\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}\sqrt{l^2-4b^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

Вариант 2

2. $\{1,\ 2\}$.

3. $]5;\ +\infty[$.

4. 4,5.

5. $\frac{2}{3}m^3\cdot\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha$.

Задачи устного экзамена

1. —. **2.** $]1; 3]$. **3.** $-\sqrt{3}$. **4.** а) $\{6\}$; б) $\left\{\frac{13}{12}\right\}$.
5. а) $]-\infty; 2-\sqrt{5}[\ \cup\ ]2-\sqrt{3};\ 2+\sqrt{3}[\ \cup\ ]2+\sqrt{5};\ +\infty[$. б) $]-1; 1[$. **6.** $y=-4$.
7. $(1; 1)$. **8.** $y=-\frac{2}{3}\operatorname{ctg}3x+\frac{5}{3}$. Указание. Конгруэнтные дуги стягиваются конгруэнтными хордами. **10.** $18\sqrt{2}$ см.

Физика

1. $l=l_0-(v_1+v_2)t=125$ м; графическое решение приведено на рисунке 3.

2. $h=\frac{p(n-1)}{\varrho g}\approx 20$ м ($p=10^5$ Па — нормальное атмосферное давление; $\varrho=10^3$ кг/м^3 — плотность воды).

3. $\varrho=\frac{p\mu}{RT}\approx 0{,}8$ кг/м^3 ($\mu=29\cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса воздуха; $R=8{,}31$ Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная).

4. $\Delta t=\frac{v^2}{4c}\approx 19$ K.

5. $U=\frac{\mathscr{E}}{1+(r+R_{пр})(nR_1+kR_2)/R_1R_2}\approx$
$\approx 204{,}7$ В. Если взять другой источник тока, напряжение на лампах в общем случае изменится.

6. $W=Um/k=3{,}6\cdot 10^6$ Дж $=1$ кВт·ч.

7. $T=\frac{2\pi m}{eB}\approx 9\cdot 10^{-9}$ с.

8. $l=\frac{T^2g}{4\pi^2}\approx 0{,}25$ м; $F=mg\left(\frac{T^2}{T'^2}-1\right)\approx$
$\approx 3\cdot 10^{-2}$ Н.

9. Угол падения α больше предельного угла $\alpha_{пр}=\arcsin(n_в/n_{ст})$; следовательно, будет происходить полное отражение света (рис. 4).

10. $d=2F=16$ см (рис. 5); если взять линзу с большим фокусным расстоянием, предмет надо будет расположить соответственно дальше.

Московский институт химического машиностроения

Математика

Вариант 1

2. $\{(10; 10^{\frac{1}{4}}), (10^{\frac{1}{4}}; 10)\}$.
3. $S_ц=2\sqrt[3]{9\pi V^2\operatorname{tg}^2\alpha}\,(1+\operatorname{ctg}\alpha)$, $V_ц=3V$.
4. $-\frac{1}{8\sqrt{3}}$.

Вариант 2

1. $x_1=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}l$ ($k, l\in\mathbf{Z}$).
2. $\{10^{-4}, 10\}$.
3. $S=\frac{\pi a^2}{12}\sqrt{4\operatorname{tg}^2\alpha+1}$, $V=\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{108}\operatorname{tg}\alpha$.
4. Наибольшее значение $\max\limits_{\mathbf{R}} y$ функция принимает в точке $x=5$, наименьшее $\min\limits_{\mathbf{R}} y$ — в точке $x=-1$.
5. $\frac{8}{3}$.

Физика

1. $t'=\frac{ul}{g}+\sqrt{\left(\frac{ul}{g}\right)^2+\frac{at^2}{g}}\approx 3{,}5$ с.

2. $l=\frac{v^2}{2(n+1)^2\mu g}\approx 8$ м.

3. $H=h(\varrho_в/\varrho_ш-1)\approx 0{,}67$ м.

4. $p=2\varrho_{рт}gl_{рт}\frac{l-l_{рт}}{l-2l_{рт}}\approx 9{,}4\cdot 10^4$ Па.

5. $m'_в=m_в-\frac{c_л m_л(0-t_л)-c_в m_в t_в}{\lambda}\approx 1{,}9$ кг;
$m'_л\approx 2{,}1$ кг.

6. $\varphi'=4\varphi=800$ В.

7. $U=2U_0\frac{d^2}{L^2}=2$ В.

8. $\Delta q=q\frac{R_1-R_2}{R_1+R_2}=10$ нКл.

9. $r=\sqrt{R_1R_2}$.

10. $F=\frac{L^2-l^2}{4L}=24$ см.

Харьковский институт радиоэлектроники

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=(-1)^{l+1}\frac{\pi}{6}+\pi l$ ($k, l\in\mathbf{Z}$).
2. $2\pi k<x<\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $\frac{5}{6}\pi+2\pi l<x<\pi+2\pi l$ ($k, l\in\mathbf{Z}$).
3. -62.
4. $3-\frac{3}{4\ln 2}$.
5. $\left\{-\frac{4}{3}\right\}$.

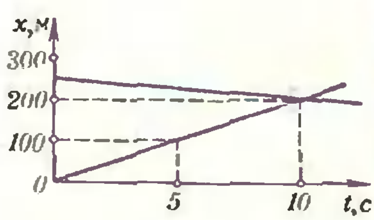


Рис. 3.

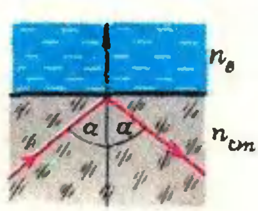


Рис. 4.

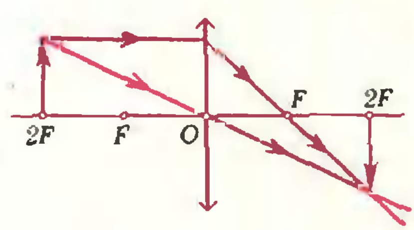


Рис. 5.

Вариант 2

1. $x_1=\pi+2\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}+\pi l$ $(k, l \in \mathbf{Z})$.

2. $]-\infty; 0[\ \cup\ ]4\frac{1}{2}; +\infty[$.

3. Радиус основания цилиндра и высота должны равняться $\sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$.

4. $\varnothing$.

5. $\left\{\left(\frac{10}{3}; \frac{20}{3}\right), (-10; 20)\right\}$.

Задачи устного экзамена

1. а) 4; б) 0. Указание. $\operatorname{tg} 45°=1$. 2. а) $[2; 3[\ \cup\ ]3; 4]$; б) $]-\infty; 0[$. 3. а) 4; б) $\frac{1}{2}$. 4. а) $\frac{1}{8}$; б) -2. 5. $\frac{\pi}{3}$. 6. $y=\frac{1}{e}x$. 7. $x=\frac{1}{2}$ — точка минимума, $y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\ln 2$.

Физика

1. $a=g\frac{m_2(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)-m_1(\sin\beta+\mu\cos\beta)}{m_1+m_2}\approx 0{,}16$ м/с^2; $T=\frac{m_1m_2g}{m_1+m_2}(\sin\alpha+\sin\beta-\mu(\cos\alpha-\cos\beta))\approx 7{,}8$ Н.

2. $\varrho=3/4\varrho_в=7{,}5\cdot 10^2$ кг/м^3.

3. $\frac{m_м}{m_\alpha}=\frac{\sqrt{E_0}+\sqrt{E}}{\sqrt{E_0}-\sqrt{E}}\approx 15{,}6$.

4. $n_1=\frac{\varrho RT-p\mu_2}{kT(\mu_1-\mu_2)}\approx 3{,}5\cdot 10^{24}$ м$^{-3}$; $n_2=\frac{\varrho RT-p\mu_1}{kT(\mu_2-\mu_1)}\approx 4{,}2\cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

5. $\frac{q}{m}=\frac{E^2}{2UB^2}\approx 10^8$ Кл/кг.

6. а) $q=C\frac{\Delta B}{\Delta t}\frac{\pi D^2 n}{4}\approx 1{,}96\cdot 10^{-7}$ Кл; б) $P=\left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)^2\frac{\pi D^3 nS}{16\varrho}\approx 2{,}8\cdot 10^{-5}$ Вт.

7. а) $t=T/12$; б) $t=T/7{,}5$.

8. $i=U\sqrt{\frac{C}{2L}}=10^{-2}$ А.

9. $\Delta l=\frac{l}{t}\frac{|AB|}{c}\approx 7{,}8$ см $\left(t=\frac{1}{25\cdot 625}\right.$ с — время, за которое луч прочерчивает одну строку, $c=3\cdot 10^8$ м/с — скорость электромагнитной волны).

10. $m=\frac{\mu Pt}{\eta E_0 N_A}\approx 0{,}031$ кг.

Московский текстильный институт им. А. Н. Косыгина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $A=1+\sqrt{bc}$.

2. $\left]\frac{1}{4}; \frac{8}{5}\right[$.

3. $x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k$, $x_2=\frac{3\pi}{4}+\pi l$ $(k, l\in\mathbf{Z})$.

4. $10\frac{2}{3}$.

5. $\pi-\arccos\frac{4}{5}$.

Вариант 2

1. $A=\operatorname{ctg}\alpha$.
2. $\div 5, 9, 13, \ldots$ или $\div 13, 9, 5 \ldots$
3. $]-1; 1[$.
4. $\sqrt{3}a^2$.
5. $y=-x+1$; $135°$.

Задачи устного экзамена

1. $\left\{\frac{1}{10}, 100\right\}$. 2. а) $]2; 7[$; б) $]-\infty; -1[$. 3. $\frac{\sqrt{6}}{6}$. 5. $y'=\frac{4x-3}{(2x^2-3x+1)\ln 2}$.

6. $\left]-\infty; -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$ — промежуток убывания, $\left[-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; +\infty\right[$ — промежуток возрастания.

7. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. 8. а) $2\frac{1}{3}$; б) $2-\sqrt{2}$.

Физика

1. $a=\frac{m_3-m_1-\mu m_2}{m_1+m_2+m_3}g\approx 1{,}56$ м/с^2; $T_1=m_1g\left(1+\frac{m_3-m_1-\mu m_2}{m_1+m_2+m_3}\right)\approx 2{,}3$ Н; $T_2=m_3g\left(1-\frac{m_3-m_1-\mu m_2}{m_1+m_2+m_3}\right)\approx 3{,}3$ Н.

2. Если пренебречь изменением массы орудия при выстреле, то скорость орудия уменьшится на $\Delta v=\frac{m_2(v_2\cos\alpha-v_1)}{m_1}\approx 0{,}4$ м/с.

3. $H=R_3(\sqrt{2}-1)\approx 0{,}4$ $R_3\approx 2560$ км (R_3 — радиус Земли).

4. $t=\sqrt{\frac{2h\varrho_т}{g(\varrho_в-\varrho_т)}}\approx 0{,}96$ с.

5. $v_{min}=\sqrt{2(c_л(t_{пл}-t)+\lambda+c_в(t_к-t_{пл})+r)}\approx 2{,}5\cdot 10^3$ м/с ($t_{пл}=0°$С — температура плавления льда, $t_к=100°$С — температура кипения воды).

6. $p'=p/5=10^5$ Па.

7. $\varphi=\frac{\varphi_1 r_1+\varphi_2 r_2}{r_1+r_2}=28$ кВ; на первый шар перейдет заряд $\Delta q=4\pi\varepsilon_0 r_1(\varphi-\varphi_1)\approx 1{,}3\cdot 10^{-7}$ Кл.

8. $\frac{I_1}{I_2}=\frac{(r+R_1)R_2}{r(R_1+R_2)+R_1R_2}=\frac{2}{7}$.

9. $l=d(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)=d\left(\operatorname{tg}\alpha-\frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right)\approx 0{,}94$ см.

10. $d=\frac{1}{|D|}=0{,}5$ м.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 2)

1. См. рис. 6.

2. Ответ: нельзя. В самом деле, пусть размеры бруска $a\times a\times b$; тогда суммарный объем 12 брусков равен $12a^2b$. С другой стороны, если ребро куба равно x, то объем каркаса

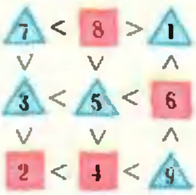


Рис. 6.

Рис. 7.

равен

$$x^3-(x-2a)^3-6a(x-2a)^2.$$

Уравнение (относительно x)

$$x^3-(x-2a)^3-6a(x-2a)^2=12a^2b$$

имеет корень $x=b+\frac{4}{3}a$, что невозможно (очевидно, x должен быть равен b, или $b+a$, или $b+2a$).

3. Ответ: 15. В самом деле, если спортсмен x раз набрал по 18 очков (попал в 10 и 8) и y раз — по 5 очков, то

$$18x+5y=99. \qquad (1)$$

Из (1) получаем $1<x<5$. Из чисел $99-18x$ на 5 делится только число $99-18\cdot 3$.

4. Ответ: 3. В самом деле, если $a_1, \ldots, a_n$ — записанные на доске числа, то $n\geq 3$. Сложив равенства

$$\left\{\begin{array}{l} 2a_1=a_2+a_3+\ldots+a_n, \\ 2a_2=a_1+a_3+\ldots+a_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2a_n=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}, \end{array}\right. \qquad (2)$$

получим $2(a_1+\ldots+a_n)=(n-1)(a_1+\ldots+a_n)$, или $(n-3)(a_1+\ldots+a_n)=0$. Отсюда $n=3$ или $a_1+\ldots+a_n=0$. При $n>3$ из условия $a_1+\ldots+a_n=0$ и системы (2) получаем $a_1=\ldots=a_n=0$, что противоречит условию задачи. При $n=3$ система (2) имеет ненулевое решение (например, $a_1=a_2=a_3=1$).

5. См. рис. 7. Более сложная задача: *доказать, что для данного набора шестиугольников такое «прикладывание» единственно.*

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шихanович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Н. Кузьмина, Э. Назаров, А. Прокофьев, И. Смирнова, Э. Смирнов

Заведующая редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Н. Дорохова

117071, Москва, Ленинский проспект, 15, «Физматлит», «Квант», тел. 234-08-21

Сдано в набор 19.1.82. Подписано в печать 19.2.82
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 7,12 Т-00352
Цена 40 коп. Заказ 78. Тираж 180 558 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

МАЙЯ ОСТАЕТСЯ ЧЕМПИОНКОЙ

Почти во всех областях интеллектуальной деятельности женщины добились успехов, соизмеримых с лучшими достижениями их коллег-мужчин.

В шахматах, однако, до недавнего времени царило полное превосходство мужчин. Знаменитая Вера Менчик, первая шахматная королева, значительно превосходила своих соперниц, но в мужских турнирах обычно оказывалась в конце таблицы. Новую эру открыла грузинская шахматистка Нона Гаприндашвили, завоевавшая звание международного гроссмейстера среди мужчин. Ее преемница, другая замечательная грузинская шахматистка Майя Чибурданидзе пошла еще дальше. В турнирах, где она была единственной представительницей прекрасного пола, она показала такие результаты, о которых многие гроссмейстеры-мужчины лишь мечтают. Два года подряд она выходила в первую лигу первенства СССР среди мужчин.

— Не страшно играть с мужчинами? — спросил однажды Майю ведущий «странички».

— Им страшнее. Они стыдятся мне проиграть.

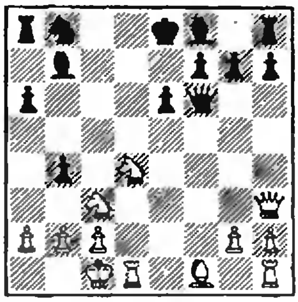
— А не жаль мужчин, которые вам сдаются?

— Пусть сражаются по-мужски! Между прочим, когда они меня обыгрывают, то не очень-то огорчаются.

— Майя, как вам удается почти весь вечер не отходить от шахматной доски?

— Когда-то гроссмейстер Пауль Керес сказал, что женщины отстают от мужчин потому, что не могут молчать пять часов подряд. Пришлось овладеть наукой молчания...

В мартовском номере «Кванта» за прошлый год мы привели эффектную комбинацию чемпионки против С. Двойриса. А вот как она завершила атаку против известного гроссмейстера В. Тукмакова.

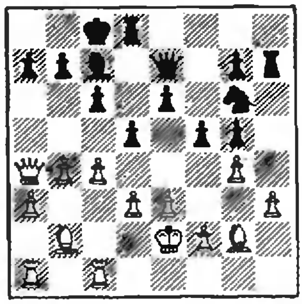


М. Чибурданидзе — В. Тукмаков

1. Кcb5! Сc5 2. К : e6 ab 3. С : b5+ Кc6 4. С : c6+ С : c6 5. Кc7+ Крf8 6. К : a8 Фf4+ 7. Крb1 Фb8 8. Лhf1 Сe7 9. Фe6. Черные сдались.

Во второй раз сыграть Чибурданидзе в первой лиге не пришлось. С этим турниром по срокам совпал ее матч на первенство мира с Наной Александрия. Нана в свое время тоже ходила в вундеркиндах. В 17 лет она впервые стала чемпионкой страны, в 1975 году уже посягала на шахматную корону в поединке с Гаприндашвили. Но в матче 1981 года явной фавориткой была 20-летняя чемпионка мира. Наверное, это и расслабило ее. Майя сделала упор на практическую игру в мужских турнирах, а фундаментальной теоретической подготовкой пренебрегла. Это могло ей дорого обойтись.

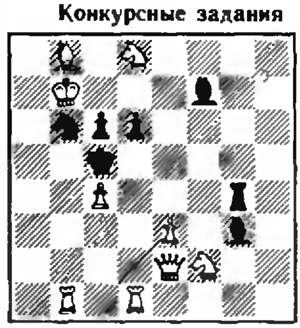
Уже начало матча было сенсационным. Во второй партии Нана, добившись подавляющего перевеса, в цейтноте лишь случайно не объявила мат, в третьей и четвертой партиях она тоже была близка к победе и, наконец, в пятой ее добилась. Почувствовав, что соперница превосходит ее в подготовке, Майя стала избегать известных дебютных вариантов. Эта тактика принесла успех — после девяти партий она уже впереди на два очка. Теперь Нана проявляет необычайную стойкость характера и исправляет положение. Перед двумя заключительными встречами счет равный — 7:7. Решающим оказался 15-й поединок.



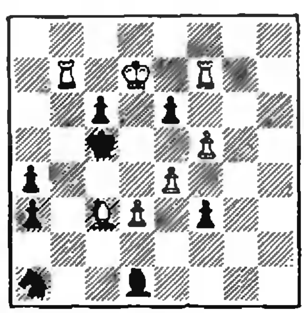
Здесь черные сильным ходом 23...d4! могли перехватить инициативу, но вместо этого они увлеклись пешкоедством. В результате Майя получила атаку, которую энергично довела до победы. **23...fg 24. Ф:a7 gh 25. Сh1 Сb8 26. Фa8 Фd6 27. cd ed 28. Сd4 Крd7 29. Ф : b7+ Фc7 30. Фa6 Лe8 31. b5 Кe7 32. Сb6 Фc8 33. bc+ К : c6 34. Фb5 Лh6 35. Ф : d5+ Лd6 36. Л : c6 Ф : c6 37. Фf5+.** Черные просрочили время, не успев сдаться.

В последней партии Александрия сравняла счет. Матч оказался первым в истории женских шахмат, закончившимся вничью. А чемпионкой мира осталась Майя Чибурданидзе.

Конкурсные задания



5. Е. Горовая. Мат в 2 хода.



6. Р. Солодова. Мат в 3 хода.

Срок отправки решений — 20 мая 1982 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 5, 6»).

Цена 40 коп.
Индекс 70465

В статье академика Л. С. Понтрягина, опубликованной в этом номере журнала, рассказывается о комплексных числах. Среди них выделяются *целые комплексные числа*, то есть числа вида $a+bi$, где a и b — целые (они включают и обычные целые числа — при $b=0$).

Простым комплексным числом называется такое целое комплексное число, при представлении которого в виде произведения двух целых комплексных чисел один из сомножителей будет равным либо $+1$, либо -1, либо $+i$, либо $-i$.

Гаусс доказал, что простое число будет и простым комплексным числом, если оно представляется в виде $4k+3$, и составным в противном случае.

Любопытно, что голландский ученый Ван-дер-Поль при исследовании высокочастотных полей столкнулся с закономерностями, описываемыми гауссовыми числами. Рисунок на обложке журнала, полученный Ван-дер-Полем с помощью ЭВМ, изображает в виде квадратиков простые комплексные числа на комплексной плоскости.

А. П.